1^a Lista de exercícios - MAT 222

Extraídos do livro: *Um Curso de Álgebra Linear* de Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Lourenço, EDUSP (1a. edição: 2001) (2a. edição: 2005).

(1) Verifique que as seguintes propriedades valem para todos $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\overline{\overline{z}} = z$. (b) $z + \overline{z} = 2re\ (z)$, $z - \overline{z} = 2i\ im\ (z)$.

(c) $|\overline{z}| = |z|$, $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. (d) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ e $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(e) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. (f) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\ re\ (z \cdot \overline{w})$.

(g) $|re\ (z)| \leq |z|$, $|im\ (z)| \leq |z|$. (h) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

(i) $|\ |z| - |w|\ | \leq |z+w|$. (j) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$.

(2) Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.

(a) Mostre que $0 \cdot v = 0$ para todo vetor $v \in V$ e que $\alpha \cdot 0 = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

(b) Mostre que se $\alpha \cdot v = 0$, com $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, então ou $\alpha = 0$ ou $v = 0$.

(3) Mostre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ (ver (1.2.2)).

(4) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{K}$ tal que com as operações de $\mathbb{K}$ é um corpo (neste caso, dizemos que $\mathbb{K}'$ é um *subcorpo* de $\mathbb{K}$). Mostre que $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}'$. Mais geralmente, mostre que se V for um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, então será um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}'$.

(5) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ um plano do $\mathbb{R}^3$ passando pela origem. Mostre que S é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(6) Suponha que estejam definidas as seguintes operações no conjunto $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a, b > 0\}$:

- $(a, b) \oplus (c, d) = (ac, bd)$, $\forall\ (a, b), (c, d) \in V$.
- $\alpha(a, b) = (a^\alpha, b^\alpha)$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall\ (a, b) \in V$.

Prove que V, munido dessas operações, é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.

(7) Seja p um número primo. Quantos elementos tem o $\mathbb{Z}_p$-espaço vetorial $(\mathbb{Z}_p)^m$, com $m \geq 1$?

(8) Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Mostre que o conjunto $\{1\}$ é um conjunto gerador do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathbb{K}$.

(9) Mostre que, para cada número inteiro $n \geq 3$, é possível encontrar um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ com n elementos. Mostre também que não existe nenhum conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ com menos de 3 elementos.

(10) É possível encontrar um conjunto gerador de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ com um número finito de elementos?

(11) Qual é o menor número de elementos em um conjunto gerador de $\mathbb{C}^2$ se o considerarmos como espaço vetorial sobre (a) $\mathbb{C}$; (b) $\mathbb{R}$; e (c) $\mathbb{Q}$?

(12) Qual é o menor número de elementos que deve conter um conjunto gerador de $\mathbb{R}$ visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$? Tente exibir um tal conjunto.

(13) Mostre que todo espaço vetorial tem um conjunto gerador.

(14) Mostre que se $\mathcal{A}$ é um conjunto gerador de um espaço vetorial V e que se $\mathcal{B}$ é um conjunto que contém $\mathcal{A}$, então $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V.

(15) Mostre que o conjunto $\{(1,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)\}$ é uma base de $\mathbb{K}^n$ sobre $\mathbb{K}$. Esta base é chamada de *base canônica* de $\mathbb{K}^n$.

(16) Mostre que o conjunto $\{1,x,\cdots,x^n,\cdots\}$ é uma base do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Esta base é chamada de *base canônica* de $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

(17) Ache uma base de $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Quantos elementos tem? E se considerarmos $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

(18)
- (a) Mostre que os conjuntos $\{(1,0),(0,1)\}$, $\{(i,0),(2,-3)\}$ e $\{(i,i),(-1,2i)\}$ são bases de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.
- (b) Mostre que $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.
- (c) Mostre que toda base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ tem 2 elementos e que toda base de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ tem 4 elementos.

(19) Mostre que $\{(z_1,z_2),(w_1,w_2)\}\subset\mathbb{C}^2$ é l.d. se e somente se $z_1w_2=z_2w_1$.

(20) Se $\mathbb{K}=\mathbb{Z}_2$, o subconjunto $\{(\overline{1},\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{1}),(\overline{0},\overline{1},\overline{1})\}$ de $\mathbb{K}^3$ é l.d.? e se $\mathbb{K}=\mathbb{Z}_{13}$?

(21) Sob que condições impostas ao escalar $\alpha\in\mathbb{C}$ os vetores $(0,1,\alpha)$, $(\alpha,0,1)$ e $(1+\alpha,1,\alpha)$ formam uma base de $\mathbb{C}^3$?

(22) Seja $W=[v_1,v_2]\subset\mathbb{C}^3$, onde $v_1=(1,0,i)$ e $v_2=(1+i,1,-1)$.
- (a) Mostre que $\{v_1,v_2\}$ é uma base de W.
- (b) Mostre que $w_1=(1,1,0)$ e $w_2=(1,i,1+i)$ estão em W e que $\{w_1,w_2\}$ é base de W.

(23) Seja $V=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$. Prove que $\{f_1,f_2,f_3\}$ é l.i. em V onde f_1,f_2,f_3 são dadas por $f_1(x)=1$, $f_2(x)=e^{ix}=\cos x+i\,\mathrm{sen}\,x$ e $f_3(x)=e^{-ix}$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

(24) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e considere no conjunto $V_{\mathbb{C}}=\{(u,v):u,v\in V\}$ as seguintes operações de adição e multiplicação por um número complexo:
- $(u_1,v_1)+(u_2,v_2)=(u_1+u_2,v_1+v_2)$, para todos $(u_1,v_1),(u_2,v_2)$ em $V_{\mathbb{C}}$.
- $(\alpha+i\beta)(u,v)=(\alpha u-\beta v,\beta u+\alpha v)$, para todo $(u,v)\in V_{\mathbb{C}}$ e todo $\alpha+\beta i\in\mathbb{C}$.

(a) Mostre que $V_{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

(b) Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ um subconjunto l.i.. Mostre que $\{(v_1, 0), (v_2, , 0), \cdots, (v_n, 0)\}$ e $\{(0, v_1), (0, v_2), \cdots, (0, v_n)\}$ são subconjuntos l.i. em $V_{\mathbb{C}}$.

(25) Para um $\mathbb{C}$-espaço vetorial V, denotaremos por $V_{\mathbb{R}}$ o conjunto V olhado como $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Mostre que se $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ for um subconjunto linearmente independente em V, então $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \cup \{iv_1, iv_2, \cdots, iv_n\}$ são subconjuntos linearmente independentes em $V_{\mathbb{R}}$.

(26) Mostre que um subconjunto $\mathcal{B}$ de um espaço vetorial V é l.i. se e somente se cada subconjunto finito de $\mathcal{B}$ for l.i.

(27) Seja $\mathcal{B}$ um subconjunto de um espaço vetorial V. Mostre que $\mathcal{B}$ é l.d. se e somente se existir $v \in \mathcal{B}$ que pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B} \setminus \{v\}$.

(28) Mostre que o conjunto $\mathbb{R}$ considerado como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ é finitamente gerado (exiba um conjunto gerador) enquanto $\mathbb{R}$, considerado como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, *não* é finitamente gerado.

(29) Seja $\mathcal{B} = \{(i, 1 - i, 2), (2, 1, -i), (5 - 2i, 4, -1 - i)\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}^3$.

(a) $\mathcal{B}$ é um conjunto l.i.?

(b) Decida se $(3 + i, 4, 2)$ pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{B}$.

(Considere $\mathbb{C}^3$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{R}$).

(30) Mostre que o conjunto S das soluções do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 5x + y + 2z - 3w = 0 \\ 6x + y - 3z + 2w = 0 \\ 3x + y + 12z - 13w = 0 \end{cases}$$

é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e exiba uma base de S.

(31) Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que $\mathcal{B} = \{1, 2 + x, 3x - x^2, x - x^3\}$ é base de V.

(b) Escreva as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ com relação à base $\mathcal{B}$.

(32) Verifique se S é um subespaço vetorial do espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$ em questão ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), nos seguintes casos:

(a) $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $S = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)^2 dx = 0\}$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(b) $V = \mathbb{R}^n$ e $S = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n : a_1.a_2 = 0\}$; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(c) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $S = \{f \in V;\ f(0) = f(1)\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V : a_{ij} = \overline{a_{ji}},\ i, j = 1, 2 \right\}$; $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(33) Sejam W_1 e W_2 subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V.

(a) Dê um exemplo mostrando que $W_1 \cup W_2$ pode não ser subespaço de V.

(b) Prove que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se e somente se $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

(34) Sejam $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ e $W = \{A \in V : trA = 0\}$. Prove que W é um subespaço de V e ache uma base e a dimensão W.

(35) Seja U um subespaço vetorial de um espaço vetorial V finitamente gerado sobre $\mathbb{K}$. Mostre que se $dim_{\mathbb{K}}\ U = dim_{\mathbb{K}}\ V$, então $U = V$.

(36) Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ tais que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(a) Mostre que se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são conjuntos l.i. em W_1 e W_2, respectivamente, então $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é l.i. em V.

(b) Mostre que se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases de W_1 e W_2 , respectivamente, então $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $W_1 + W_2$.

(37) Seja $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) : a_{11} + a_{12} = 0 \right\}$.

(a) Mostre que W é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) Determine uma base de W.

(c) Seja $W_1 = \{(a_{ij})_{i,j} \in V : a_{21} = -\overline{a_{12}}\}$. Prove que W_1 é um subespaço de V sobre $\mathbb{R}$ e ache uma base de W_1.

(38) Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S \subset V$ um subconjunto não vazio de V. Mostre que S é um subespaço de V se e somente se $S + S \subset S$ e $\lambda S \subset S$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$.

(39) Encontre uma base do $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores (1,2,-2,1) e (1,0,-2,2).

(40) Considere o subespaço vetorial W de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ gerado pelo conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \{&1 + 2x + x^2 + 3x^3 + x^4,\ 1 - 2x - 2x^2 - 2x^3 - 3x^4, \\ &2 - x^2 + x^3 - 2x^4,\ x - x^3 + x^4,\ 3x^2 + 6x^3 + 3x^4\}. \end{aligned}$$

Determine uma base $\mathcal{B}$ de W que esteja contida em $\mathcal{A}$.

(41) Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $W_1 = \{f \in V : f(x) = f(-x),\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{f \in V : f(-x) = -f(x),\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}\}$. Prove que W_1 e W_2 são subespaços de V e que $V = W_1 \oplus W_2$.

(42) Seja $W = \{(z, z) : z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$. Mostre que W é um subespaço de $\mathbb{C}$ e encontre subespaços W' e W'' de $\mathbb{C}^2$ tais que $W' \oplus W = W'' \oplus W = \mathbb{C}^2$ e $W' \cap W'' = \{0\}$.

(43) Mostre que todo espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{K}$ é uma soma direta de subespaços vetoriais de dimensão 1.

(44) Mostre que se $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$, então $dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{t} dim_{\mathbb{K}} W_i$.

(45) Seja $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t$ e sejam $\mathcal{B}_i \subset W_i$, para cada $i = 1, \cdots, t$. Considere $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_t$.

(a) Mostre que se $\mathcal{B}_i$ for l.i. para cada $i = 1, \cdots, t$, então $\mathcal{B}$ é l.i.

(b) Mostre que se $\mathcal{B}_i$ for uma base de W_i para cada $i = 1, \cdots, t$, então $\mathcal{B}$ é uma base de V.