a) (1,5) Duas matrizes diagonalizáveis são semelhantes se, e somente se, elas têm o mesmo polinômio minimal e o mesmo polinômio característico.

b) (1,5) Duas matrizes 8 x 8 nilpotentes são semelhantes se, e somente se, elas têm o mesmo posto e o mesmo índice de nilpotência.

(a) VERDADEIRA :

($\Rightarrow$) Duas matrizes semelhantes sempre têm o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal.

($\Leftarrow$) Se A e B são diagonalizáveis e

$$p_A(x) = (x-c_1)^{n_1} \cdots (x-c_k)^{n_k} = p_B(x)$$

$$(\text{e } m_A(x) = m_B(x) = (x-c_1)\cdots(x-c_k)) \text{ então}$$

$\exists\, P, Q$ invertíveis tais que

$$P^{-1}AP = D \quad \text{e} \quad Q^{-1}BQ = D, \quad \text{com}$$

$$D = \begin{bmatrix} \begin{matrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_1 \end{matrix}_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} c_k & & \\ & \ddots & \\ & & c_k \end{matrix}_{n_k} \end{bmatrix}.$$

Logo A é semelhante a B.

(b) FALSA

($\Rightarrow$) verdade : Se duas matrizes 8 x 8 nilpotentes são semelhantes, então elas têm o mesmo posto e o mesmo índice de nilpotência. É claro!!

($\Leftarrow$) falsa . Exemplo

$8 = 4 + 2 + 2$

$8 = 4 + 3 + 1$

As matrizes

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&&&&\\ 1&0&0&0&&&&\\ 0&1&0&0&&&&\\ 0&0&1&0&&&&\\ &&&&0&0&&\\ &&&&1&0&&\\ &&&&&&0&0\\ &&&&&&1&0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&&&&\\ 1&0&0&0&&&&\\ 0&1&0&0&&&&\\ 0&0&1&0&&&&\\ &&&&0&0&0&\\ &&&&1&0&0&\\ &&&&0&1&0&\\ &&&&&&&0 \end{bmatrix}$$

têm o mesmo posto (5) o mesmo índice de nilpotência (4) e NÃO são semelhantes !