

4. (valor 4,0) As seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas? Prove ou dê um contra-exemplo.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e com produto interno. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

- (a) Se T é um operador linear diagonalizável então T é normal.
- (b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\langle Tv, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$, então T é o operador nulo.
- (c) Se T um operador linear normal em V tal que T é invertível e $T^5 = T^3$. Então $T^{-1} = T$.
- (d) Se E é um operador linear normal e idempotente então $E^* = E$.

(a) Falso:

EXEMPLO Tome $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} \quad p_T(x) = (x-1)(x-2) + 1$$

$$= x^2 - 3x + 3$$

As raízes são $\frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2}$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

São raízes $\neq s$ e então $m_T(x) =$

$$p_T(x) = \text{produto de fatores lineares } \neq s \Rightarrow T \text{ diag.}$$

$$[T^*]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

$$[TT^*]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{bmatrix} \quad [T^*T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 5 \end{bmatrix}$$

Logo $TT^* \neq T^*T$ e T NÃO É NORMAL

(b) Falso

Exemplo $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (-y, x)$.

$T \neq 0$ e $\langle T(x, y), (x, y) \rangle = \langle (-y, x), (x, y) \rangle = 0$

(c) Verdadeiro

Se $T^5 = T^3$, temos que o polinômio minimal de T é divisor de $X^5 - X^3 = X^3(X^2 - 1)$. Assim, como T é NORMAL, $m_T(x)$ é produto de fatores lineares distintos. Logo $m_T(x)$ é divisor de $X(X^2 - 1)$.