

3. (valor 2,0) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno $\langle, \rangle$ e seja T um operador linear em V .

Prove que:

(a) $(1,0) \text{ Ker } T^* = (\text{Im } T)^\perp$

(b) $(1,0) \text{ Im } T^* = (\text{Ker } T)^\perp$

(a) Provar que $\text{Ker } T^* \subset (\text{Im } T)^\perp$

Seja $u \in \text{Ker } T^*$ e $v \in V$

$$\langle u, Tv \rangle = \langle T^*u, v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$$

Logo $u \in (\text{Im } T)^\perp$ e $\boxed{\text{Ker } T^* \subset (\text{Im } T)^\perp}$ (*)

Seja agora $u \in (\text{Im } T)^\perp$. Provar que $T^*u = 0$.

Como $u \in (\text{Im } T)^\perp$, $\langle u, Tv \rangle = 0 \quad \forall v \in V$.

Logo $\langle T^*u, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$

que implica que $T^*u = 0 \implies u \in \text{Ker } T^*$.

Assim $\boxed{(\text{Im } T)^\perp \subset \text{Ker } T^*}$ (**)

De (*) e (**) temos a igualdade.

(b) $\text{Im } T^* \subset (\text{Ker } T)^\perp$

Seja $u \in \text{Ker } T$ e $T^*v \in \text{Im } T^*$, $v \in V$

Então $\langle T^*v, u \rangle = \langle v, Tu \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$

$\therefore T^*v \perp u \quad \forall u \in \text{Ker } T \therefore \boxed{\text{Im } T^* \subset (\text{Ker } T)^\perp}$

Vamos provar que $\dim \text{Im } T^* = \dim (\text{Ker } T)^\perp$

$$\dim (\text{Ker } T)^\perp = \dim V - \dim \text{Ker } T = \dim \text{Im } T =$$

$$\dim V - \dim (\text{Im } T)^\perp = \dim V - \dim \text{Ker } T^* = \dim \text{Im } T^*.$$

Assim $\boxed{\text{Im } T^* = (\text{Ker } T)^\perp}$ (a) item (a)