

(b) ($\Rightarrow$)

Suponha que $T^* = -T$ e seja $\alpha \in \mathbb{C}$ tq $\exists v \neq 0, v \in V$ com $Tv = \alpha v$.

$$\begin{aligned}\alpha \langle v, v \rangle &= \langle \alpha v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, T^* v \rangle \\ &= \langle v, -Tv \rangle = \langle v, -\alpha v \rangle = -\bar{\alpha} \langle v, v \rangle\end{aligned}$$

hipótese

Logo $\alpha + \bar{\alpha} = 2\operatorname{Re}(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha$ é imaginário puro.

($\Leftarrow$) Suponha que T é normal e que os autovalores de T são números complexos imaginários puros. Provar que $T^* = -T$.

Como T é normal, existe B base ortonormal tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}$. Cada $\alpha_j = i b_j$ $b_j \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\therefore [T^*]_B &= \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \bar{b}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i \bar{b}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -i b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -i b_n \end{bmatrix} = -[T]_B.\end{aligned}$$

Assim, $T^* = -T$.