

2. (valor 2,0) Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{C}$  e com produto interno  $\langle, \rangle$  e seja  $T$  um operador linear normal em  $V$ .

(a) (1,0) Prove que  $T$  é unitário se e somente se os autovalores de  $T$  são números complexos de módulo igual a 1.

(b) (1,0) Prove que  $T^* = -T$  se e somente se os autovalores de  $T$  são números complexos imaginários puros.

(a) ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $T$  é unitário. Então

$$TT^* = T^*T = I.$$

Seja  $\alpha \in \mathbb{C}$  um autovalor de  $T$ , e seja  $v \neq 0$  tal que  $Tv = \alpha v$ . Então

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &= \langle T^*Tv, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \langle \alpha v, \alpha v \rangle \\ &= \alpha \bar{\alpha} \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Logo  $\|v\|^2 = |\alpha|^2 \|v\|^2$ . Como  $\|v\|^2 \neq 0$ , vale que  $|\alpha|^2 = 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Se  $T$  é normal,  $\exists$   $B$  base ORTONORMAL de  $V$  tq  $[T]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}$ . Como a base  $B$

é ortonormal,  $[T^*]_B = ([T]_B)^* = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\alpha}_n \end{bmatrix}$ .

Assim  $[TT^*]_B = [T]_B [T^*]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \bar{\alpha}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \bar{\alpha}_n \end{bmatrix}$ .

Mas  $|\alpha_i|^2 = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$ , por hipótese.

Logo  $TT^* = I$ .