

(B)

Nome : _____
 N^oUSP : _____ RG : _____
 Turma : _____ Professor : _____
 Assinatura : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

1. (valor 2,0) Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Encontre uma matriz } \underline{\text{ortogonal}} \ P \text{ tal que } P^t A P \text{ é diagonal.}$$

Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\text{can}} = A$.
 Como o posto de A é 1, $\dim \text{Ker } T = 2$. Assim

$$\dim \text{Ker } T = 2 \implies p_T(x) = p_A(x) = x^2(x - a),$$

Agora, observe que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 33 \\ 11 \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Teremos então

$$p_A(x) = x^2(x - 11) \text{ e } V(11) = \left[(1, 3, 1) \right]$$

Uma base ortonormal para $V(11)$ é $[e_3]$, onde

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{11}} (1, 3, 1)$$

Achar uma base de $V(0) = \text{Ker } T = \{(x, y, z) \mid x + 3y + z = 0\}$
 $\{v_1 = (3, -1, 0) \text{ e } v_2 = (0, -1, 3)\}$ é uma base de $V(0)$.

Vamos ortonormalizá-la usando Gram-Schmidt.

$$e_1 = v_1 / \|v_1\| = \frac{1}{\sqrt{10}} (3, -1, 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Seja } u_2 &= v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = (0, -1, 3) - \frac{1}{10} (3, -1, 0) \\ &= \left(-\frac{3}{10}, -\frac{9}{10}, \frac{30}{10} \right) \end{aligned}$$

$$\|u_2\| = \frac{1}{10} \sqrt{9 + 81 + 900} = \frac{1}{10} \sqrt{990}$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{990}} (-3, -9, 30) = \frac{1}{\sqrt{110}} (-1, -3, 10)$$