

(A)

Nome : _____
Nº USP : _____ RG : _____
Turma : _____ Professor : _____
Assinatura : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

1. (valor 2,0) Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Encontre uma matriz ortogonal } P \text{ tal que } P^t A P \text{ é diagonal.}$$

Observe que a matriz A tem posto 1. Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é o operador linear tal que $[T]_{\text{can}} = A$, então $\dim \text{Ker } T = 2$.

$$\text{Logo } p_A(x) = p_T(x) = x^2(x-a).$$

$$\text{Agora note que } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim $p_A(x) = x^2(x-6)$ e um autovetor associado ao autovalor 6 é $(1, 2, 1)$.

$V(6) = [(1, 2, 1)]$. Uma base ortogonal de $V(6)$ é $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$.

O outro autovalor de A é o 0, com multiplicidade 2. $V(0) = \text{Ker } T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$

Uma base de $\text{Ker } T$ é $\{(2, -1, 0), (0, -1, 2)\}$

Vamos aplicar o Processo de Gram-Schmidt e achar uma base ortogonal de $V(0)$.

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0) = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = \\ (0, -1, 2) - \frac{1}{5}(2, -1, 0) &= \\ = (0, -1, 2) - (2/5, -1/5, 0) &= \\ = (-2/5, -4/5, 2) \end{aligned}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + \frac{50}{25}} = \sqrt{\frac{70}{25}} = \sqrt{\frac{14}{5}} \quad \text{Logo } e_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 2)$$