2. (1,5) a) Seja $N : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ um operador linear nilpotente de posto igual a 5 e com índice de nilpotência igual a 4. Qual é a forma de Jordan de N? **Justifique.**

b) (1,5) Quais são todas as matrizes reais 7 x 7 não semelhantes com polinômio minimal $m_A(x) = (x-1)^2(x+1)^3$? **Justifique.**

c) (1,0)Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual é seu polinômio característico? E seu polinômio minimal? **Responda sem fazer contas! Justifique.**

(a) N é um operador nilpotente de índice de nilpotência 4 em um espaço de dimensão 7. Então os sistemas invariantes possíveis são: $(2, 4 \geq 3)$, $(3, 4 \geq 2 \geq 1)$ e $(4, 4 \geq 1 \geq 1 \geq 1)$. Como posto$N = 5$, dim Ker$N = 2$. Assim a única possibilidade é $(2, 4 \geq 3)$. e a matriz na forma de Jordan é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Como $m_A(x)$ é um divisor de $p_A(x)$, as possibilidades para $p_A(x)$ são: (1) $(x-1)^2(x+1)^5$
(2) $(x-1)^3(x+1)^4$
(3) $(x-1)^4(x+1)^3$

Para (1) temos 2 possibilidades:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ & & -1 & 0 & 0 & & \\ & & 1 & -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & -1 & & \\ & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ & & -1 & 0 & 0 & & \\ & & 1 & -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & -1 & & \\ & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para (2) temos 1 possibilidade:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & -1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para (3) temos 2 possibilidades:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & & \\ & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Observe que a matriz A está na forma de Jordan. O bloco $J(3)$ é 3×3, $J(0)$ é 2×2 e $J(1)$ é 3×3. Assim $p_A(x) = (x-3)^3 x^2 (x-1)^2$. O tamanho do primeiro bloco de cada bloco $J(3)$, $J(0)$ e $J(1)$ é a multiplicidade algébrica do autovalor como raiz do polinômio minimal. Assim $m_A(x) = (x-3)^3 x (x-1)^2$.