

Nome : _____
 N°USP : _____ RG : _____
 Turma : _____ Professor : _____
 Assinatura : _____

Q	N
1	
2	
3	
Total	

1. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) (1,0) Encontre os polinômios característico e minimal de A .

b) (1,0) Determine a forma de Jordan de A .

c) (1,0) Encontre uma matriz invertível $P \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ esteja na forma de Jordan.

(a) $p_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ e fazendo as contas vemos que
 $m_A(x) = (x-1)^2(x-2).$

(b) A forma de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $[T]_{\text{can}} = A$.

Pelo TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO PRIMÁRIA temos que $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$
 onde $W_1 = \text{Ker}(T-I)^2$ e $W_2 = \text{Ker}(T-2I)$. Além disso, se

$$T_1 = T|_{W_1} \text{ e } T_2 = T|_{W_2}, \quad m_{T_1}(x) = (x-1)^2 \text{ e } m_{T_2}(x) = (x-2).$$

Para achar uma base de W_2 :

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ x - 2y - 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{e assim } x = z, \text{ e } y = -2x \\ &\text{e } z \text{ é qualquer.} \end{aligned}$$

Uma base B_2 de W_2 é constituída pelos vetores $(0, 0, 0, 1)$ e $(1, -2, 1, 0)$, dois autovetores $\perp$ associados ao autovalor 2.

Agora, $W_1 = \text{Ker}(T-I)^2$

$$[(T-I)^2]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & -8 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$