

Nome : _____
NºUSP : _____ RG : _____
Turma : _____ Professor : _____
Assinatura : _____

Q	N
1	
2	
3	
Total	

1. Seja $A \in M_4(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) (1,0) Encontre os polinômios característico e minimal de A .
b) (1,0) Determine a forma de Jordan de A .
c) (1,0) Encontre uma matriz invertível $P \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ esteja na forma de Jordan.

(a) $p_A(x) = (x-1)^3(x-2)$

Testar para ver qual é o polinômio minimal:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A-I} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A-2I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A-I} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(A-I)(A-2I)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$

(b) Se $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é o operador linear tal que $[T]_{can} = A$, então, pelo Teorema da Decomposição Primária, $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$, onde $W_1 = \text{Ker}(T-I)^2$ e $W_2 = \text{Ker}(T-2I)$. Além disso, $\dim W_1 = 3$, $\dim W_2 = 1$. Se $T_i = T|_{W_i}$, $i=1,2$, temos que $m_{T_1}(x) = (x-1)^2$ e $m_{T_2}(x) = x-2$. Sendo assim, $N_1 = T_1 - I$ é um operador nilpotente de índice de nilpotência 2 em um espaço de dimensão 3. Logo, $\exists B_1$ base de W_1 tal que $[N_1]_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $(3=2+1)$.