

3. (valor 4,0) Decida se as afirmações abaixo são VERDADEIRAS ou FALSAS. Em cada caso, prove ou dê um contra-exemplo.

- (a) Sejam $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ transformações lineares tais que $S \circ T = I_{\mathbb{R}^n}$ e $T \circ S = I_{\mathbb{R}^m}$. Então $m = n$.
- (b) Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Então $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.
- (c) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita n sobre $\mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(V)$ é tal que todo vetor não nulo é um autovetor de T então existe $c \in \mathbb{K}$ tal que $Tv = cv$ para todo $v \in V$.

(d) A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$ em $M_5(\mathbb{R})$

3(a) $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m \xrightarrow{S} \mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m$

So $T = I_{\mathbb{R}^n}$ $\therefore$ So T é injetora $\therefore T$ é injetora

$\therefore n \leq m$.

Agora $T \circ S = I_{\mathbb{R}^m}$. Pelo mesmo raciocínio, S é injetora.

$\therefore m \leq n$. Logo $\boxed{m = n}$ VERDADEIRA

(b) FALSA, considere por exemplo, (existem infinitos exemplos!)

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$Te_1 = 0$

$\text{Ker } T = \langle e_1 \rangle$

$Te_2 = e_1$

$\text{Im } T = \langle e_1 \rangle$

É claro que $\text{Im } T = \text{Ker } T$, então a soma NÃO é direta!

VERDADEIRA

(c) Se $n = 1$, é óbvio

Se $n > 1$, seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V .

Para cada $i \neq 1$, os vetores v_1 e v_i são L.I. Temos que

$T(v_1) = c_1 v_1$ e $T(v_i) = c_i v_i$ pois todo vetor não

nulo é autovetor. Também $T(v_1 + v_i) = c(v_1 + v_i)$

Assim: $c_1 v_1 + c_i v_i = c v_1 + c v_i$, o que implica

que $c = c_1 = c_i$. Assim $T(v_i) = c v_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Se $v \in V$, $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Logo $Tv = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = c(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = cv$.

(d) VERDADEIRA. Considere $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ tq $[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.
Comp $\text{posto}(T) = 1$, $\dim \text{Ker } T = 4$. Também o vetor $(1, 1, 1, 1, 1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 15. Juntando o $\mathbb{R}^4$ vetor $(1, 1, 1, 1, 1)$ a uma base de $\text{Ker } T$, temos uma base B de $\mathbb{R}^5$ tq $[T]_B$ é a outra matriz.