

A

3. (valor 4,0) Decida se as afirmações abaixo são VERDADEIRAS ou FALSAS. Em cada caso, prove ou dê um contra-exemplo.

- (a) Sejam $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ transformações lineares tais que $S \circ T = I_{\mathbb{R}^n}$ e $T \circ S = I_{\mathbb{R}^m}$. Então $m = n$.
- (b) Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ e seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Então $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.
- (c) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita n sobre $\mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(V)$ é tal que todo vetor não nulo é um autovetor de T então existe $c \in \mathbb{K}$ tal que $Tv = cv$ para todo $v \in V$.

(d) A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ em $M_5(\mathbb{R})$.

(a), (b) e (c) são iguais ao da prova tipo B

(d) Considere

$$T: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5 \text{ com}$$

$$[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ - & - & - & - \\ 2 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

Então, posto $T = 1 \therefore \dim \text{Ker } T = 4$

O vetor $v = (1, 1, 1, 1, 1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 10. Se $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma base de $\text{Ker } T$, então $\{v, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^5$.

tg $[T]_B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Logo as matrizes são semelhantes, (pois

são matrizes da mesma transformação linear.)