

2. (a) (valor 3,0) Seja $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ um operador linear tal que $T^2 = -I$.

Seja $W_1 = \{v \in \mathbb{C}^n \text{ tal que } Tv = iv\}$ e

$W_2 = \{v \in \mathbb{C}^n \text{ tal que } Tv = -iv\}$.

Mostre que $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2$. É tal T diagonalizável? Justifique.

b) Pense agora em $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $S^2 = -I$. Qual é o polinômio minimal de S ? Poderia tal S ser diagonalizável? Por quê? Justifique.

$$(a) \quad T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad T^2 = -I$$

Provar que $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2$

$$v \in \mathbb{C}^n. \text{ Então } v = \frac{v + iTv}{2} + \frac{v - iTv}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{e } T\left(\frac{v + iTv}{2}\right) &= \frac{1}{2} [Tv^2 + i T^2 v] = \frac{1}{2} [Tv - i v] \\ &= \frac{1}{2} (Tv - i v) = -i \left(\frac{1}{2} (v + iTv)\right) \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \frac{v + iTv}{2} \in W_2$$

$$\text{Analogamente, } \frac{v - iTv}{2} \in W_1$$

$$\text{Logo } V = W_1 + W_2$$

Provar que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$$\text{Se } v \in W_1 \cap W_2, \text{ então } Tv = iv = -iv \therefore 2iv = 0$$

$$\therefore v = 0$$

Logo $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2$. Se B_1 é uma base de W_1 e

B_2 é uma base de W_2 , então $B = B_1 \cup B_2$ é uma base

de V (pois $V = W_1 \oplus W_2$) e $[T]_B = \begin{bmatrix} i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -i \end{bmatrix}$.

(Os elementos de B_1 são autovetores associados ao autovalor i e os de B_2 a $-i$)

(b) Como $S^2 = -I$, temos que $S^2 + I = 0$.

S é anulado pelo polinômio $X^2 + 1$. Assim

o polinômio minimal de S , $m_S(X)$ é um divisor de

$X^2 + 1$. Mas como esse polinômio não tem divisores (quando

pensado como polinômio com coef. em $\mathbb{R}$), temos que ter

$m_S(X) = X^2 + 1$. Assim $p_S(X) = (X^2 + 1)q(X)$ (por Cayley-Hamilton),
Portanto $p_S(X)$ NÃO TEM todas as raízes em $\mathbb{R}$ e $\therefore S$ NÃO é diagonalizável