

(B)

Nome : _____
Nº USP : _____ RG : _____
Turma : _____ Professor : _____
Assinatura : _____

Q	N
1	
2	
3	
Total	

1. (valor 3,0) Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre o polinômio característico e o polinômio minimal de T .
(b) Prove que T é diagonalizável e encontre uma base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores de T .
(c) Encontre uma matriz invertível $P \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

$$(a) \det \begin{bmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3-x \end{bmatrix} = (2-x)(-x) \begin{bmatrix} -x(3-x) + 2 \end{bmatrix}$$

$$= (x^2 - 2x)(x^2 - 3x + 2)$$

$$= x(x-2)^2(x-1)$$

$$\therefore p_T(x) = x(x-1)(x-2)^2$$

As possibilidades para o polinômio minimal são

$$m_T(x) = x(x-1)(x-2) \text{ ou } m_T(x) = p_T(x)$$

Teste primeiro $x(x-1)(x-2)$ e veja que esse polinômio anula a matriz A

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \therefore m_T(x) = x(x-1)(x-2)$$

OBS: Você poderia fazer (b) primeiro, concluir que T é diagonalizável e daí $m_T(x) = x(x-1)(x-2)$ (produto de fatores lineares distintos).

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \\ y-2t \\ z+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} x=0 \\ y=2t \\ z=-3t \end{matrix}$$

$$\therefore (0, 2t, -3t, t), t \in \mathbb{R} \text{ os autovetores associados ao } 0$$