

(b) Achar uma base de cada um dos autoespaços
 $V(0) = \text{Ker } T$, $V(1) = \text{Ker } (T - I)$ e $V(2) = \text{Ker } (T - 2I)$ A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ y - 2t \\ z + 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore \text{Ker } T = \{(0, 2t, -3t, t), t \in \mathbb{R}\}$ e uma base de $V(0)$ é $\{(0, 2, -3, 1)\}$ $\dim V(0) = 1 = m_a(0)$

$V(1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \\ y - z - 2t \\ z + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} y = 0 \\ z = -2t \end{matrix}$$

$$V(1) = \{(x, 0, -2t, t), x, t \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0, 0) + t(0, 0, -2, 1)\}$$

Uma base de $V(1)$ é $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, -2, 1)\}$ pois estes vetores são LI e geram $V(1)$.
 Assim $\dim V(1) = 2 = m_a(1)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -2y \\ y - 2z - 2t \\ z + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = y = 0 \text{ e } z = -t$$

$$V(2) = \{(0, 0, -t, t), t \in \mathbb{R}\} \text{ e uma base de } V(2) \text{ é } \{(0, 0, -1, 1)\}$$

$$\text{Logo } m_a(2) = m_g(2) = 1$$

Assim T é diagonalizável.

Como $V = V(0) \oplus V(1) \oplus V(2)$, o conjunto

$B = \{(0, 2, -3, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, -2, 1), (0, 0, -1, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores de T .

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D.$$

(c) Tome $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Temos que

$$PAP = D.$$

(Mesma explicação que na prova tipo B)