

MAT 222 - Álgebra Linear II
1ª Prova - 19.04.2005

(A)

Nome : _____
 N°USP : _____ RG : _____
 Turma : _____ Professor : _____
 Assinatura : _____

Q	N
1	
2	
3	
Total	

1. (valor 3,0) Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) Encontre o polinômio característico e o polinômio minimal de T .
 (b) Prove que T é diagonalizável e encontre uma base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores de T .
 (c) Encontre uma matriz invertível $P \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

(a)

$$\det \begin{bmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3-x \end{bmatrix} = (1-x)(-x) \begin{bmatrix} -x(3-x) + 2 \end{bmatrix} =$$

$$= x(x-1)(x^2-3x+2) = x(x-1)^2(x-2)$$

$\therefore p_T(x) = x(x-1)^2(x-2)$

As possibilidades para o polinômio minimal são:
 $m_T(x) = x(x-1)(x-2)$ ou $m_T(x) = p_T(x)$.
 Quando testamos o polinômio $x(x-1)(x-2)$, vemos que ele anula a matriz A e portanto é o polinômio minimal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO Você pode resolver primeiro o item (b). Dá
 você conclui que T é diagonalizável e portanto
 $m_T(x)$ é produto de fatores lineares distintos e assim
 $m_T(x) = x(x-1)(x-2)$.