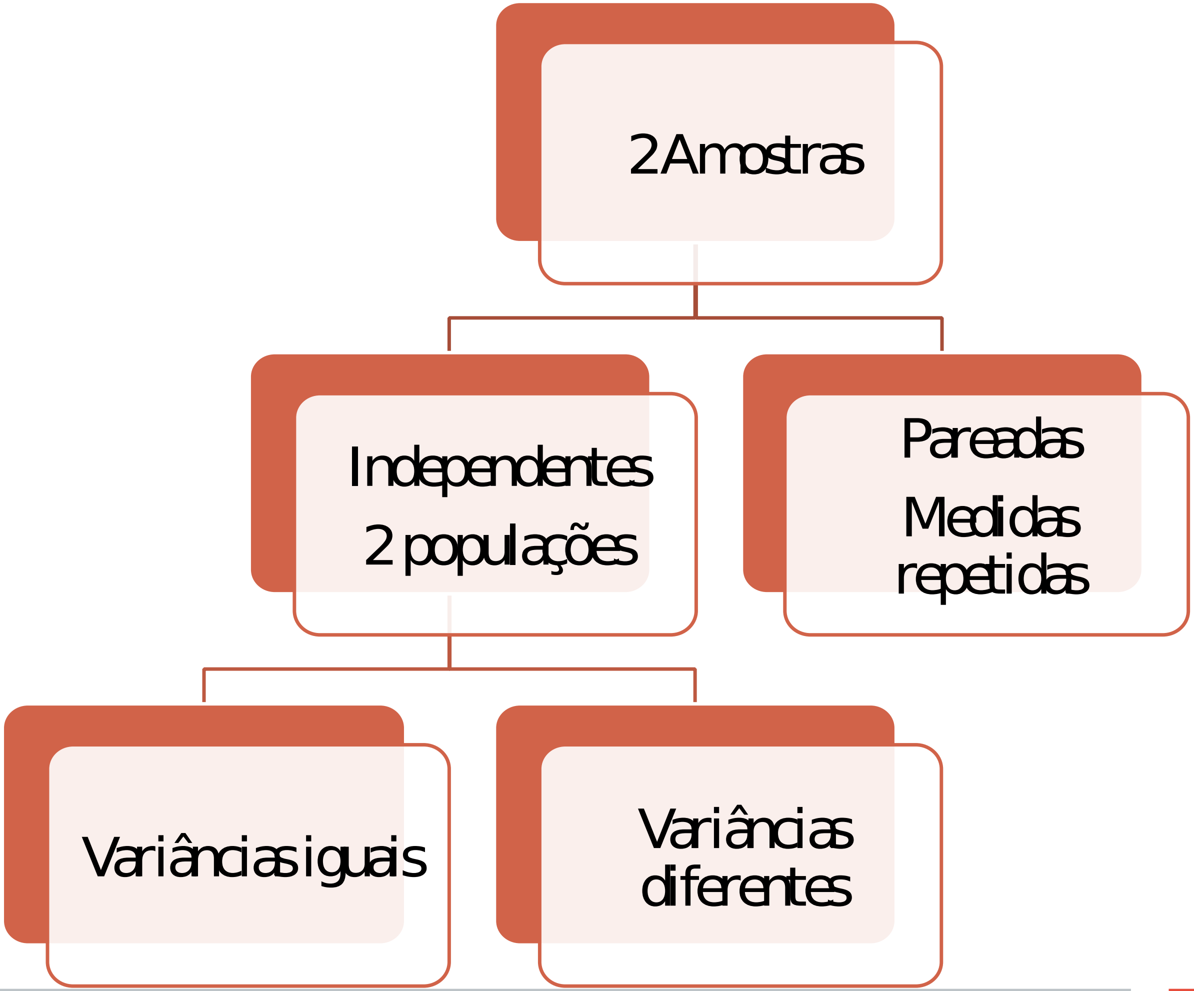
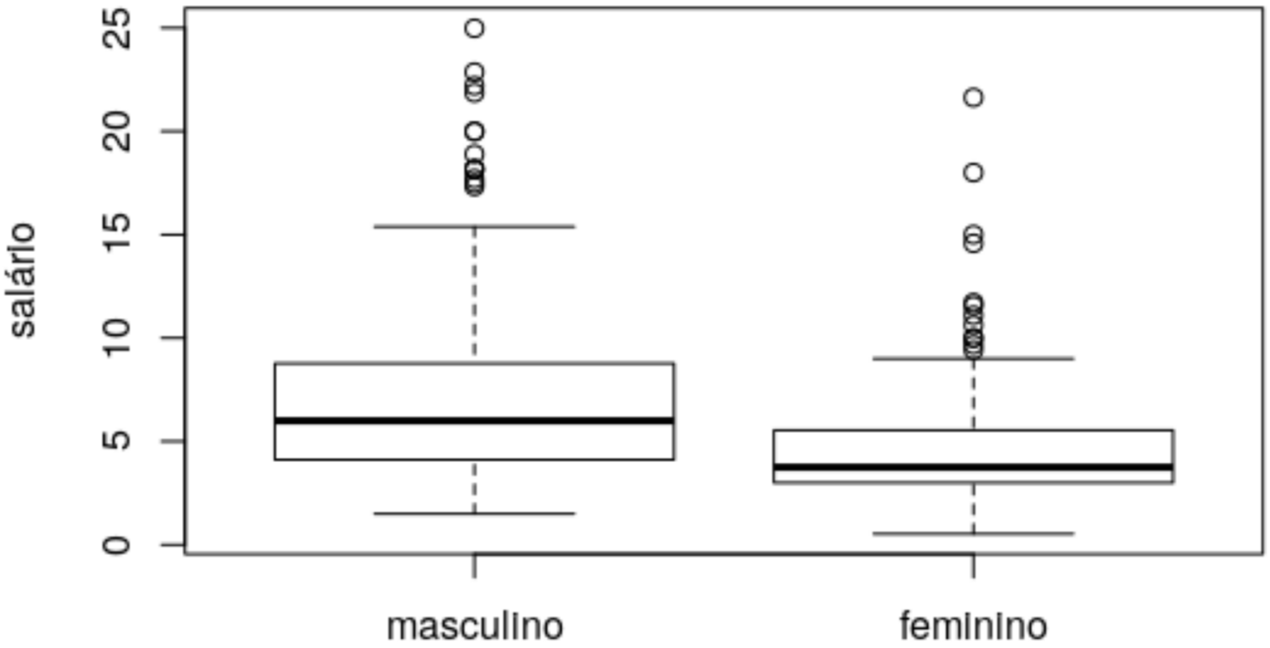
Testes de Hipóteses – 2 Médias

Airlane P. Alencar
IME-USP

Possibilidades



Desafio: Salários segundo o sexo



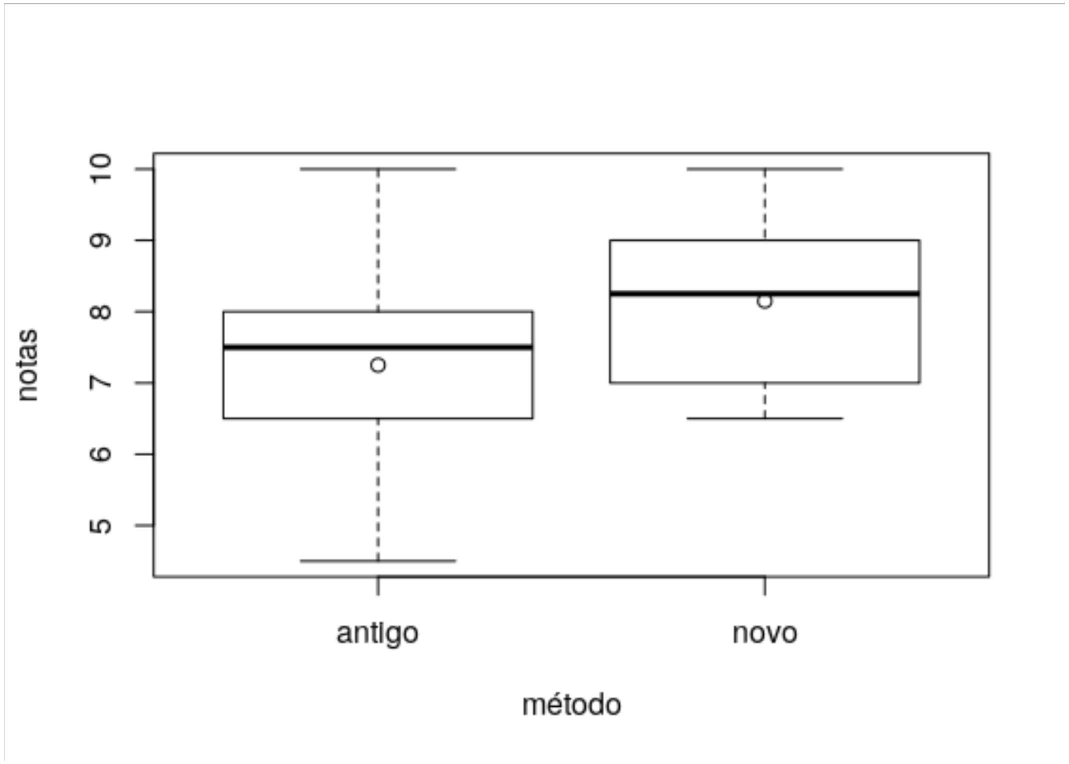
Wooldridge: wage1

Situação problema Bussab,Morettin seção 13.7. ex.39

Em um estudo sobre um novo método para ensinar Matemática a alunos do primeiro grau, dez crianças foram selecionadas ao acaso e ensinadas pelo novo método, enquanto outra amostra de dez serviram como controle e foram ensinadas pelo método tradicional. Após dez semanas o desempenho dos alunos em um teste foi avaliado e obtiveram-se as seguintes notas:

Notas: 2 métodos

	Método	
	X = Antigo	Y= Novo
	7.5	8.5
	10.0	7.5
	6.5	9.0
	5.0	9.5
	8.0	10.0
	7.5	7.0
	4.5	6.5
	9.5	8.0
	6.5	8.5
	7.5	7.0
Média	7.25	8.15
Variância	3.01	1.34
Desvio Padrão	1.74	1.16
Mínimo	4.5	6.5
Mediana	7.5	8.25
Máximo	10.0	10.0



Duas amostras independentes

Coletamos dados em cada uma das populações

População 1: média pop. μ_X **, var. pop.** σ_X^2

Amostra 1: X1, ..., Xn

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

População 2: média pop. μ_Y **, var. pop.** σ_Y^2

Amostra 2: Y1, ..., Ym

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i}{m} \qquad S_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (Y_i - \bar{Y})^2}{m-1}$$

Variâncias iguais ou diferentes?

Teste para decidir

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \qquad\qquad H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Estatística de teste se X e Y são normais: $F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$

Sob H0: $F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \overset{H_0}{\sim} F_{n-1,m-1}$

Rejeito $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ **se F muito pequeno ou grande**

se Fobs<f1 ou Fobs>f2

Observação para usar tabela da F

Pode procurar os valores na tabela da Fn-1,m-1 e achar o valor f2.

Para α fixado, encontre na tabela $F(m\text{-}1;\, n\text{-}1)$ (observe que os *g.l.* foram trocados) um valor g_1 tal que $P(F\ (m\text{-}1;\, n\text{-}1) > g_1) = \alpha/2$ e calculamos $f_1 = 1/g_1$.

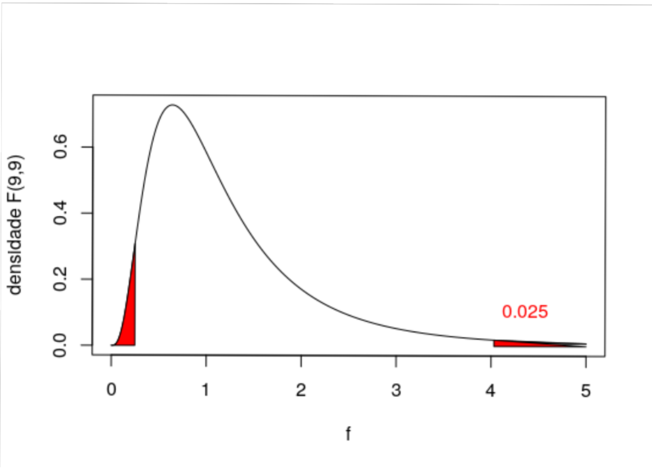
Teste-F	X = Antigo	Y= Novo
Média	7.25	8.15
Variância	3.01	1.34
Observações	10	10
df	9	9
F	**2.2557**	
P bicaudal	**0.2414**	
F Crítico bicaudal	**0.2484**	**4.0260**

Procurar os valores na dist. F9,9

Rejeito H0: var. iguais se Fobs<0.2484 ou Fobs>4.0260 como observamos 2,2556, não rej. H0.

Calculo P(F9,9>2.2557)=0,1207 e
P(F9,9<2.2557)=1-0,1207=0,0,8793.
Valor-p= 2.min(0,1207,0,8703)= 0,2414
Rej. H0 se Valor-p < alfa = 5% => não rej. H0

Não há diferença significativa entre as variâncias (p=0,2414).



Teste duas médias com variâncias iguais

Sabemos que se X e Y têm dist. Normal ou se n e m são grandes, as médias amostrais têm distribuição normal e

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_X-\mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\left(\mu_X-\mu_Y\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

As variâncias são desconhecidas e estimadas usando as variâncias amostrais.

Se as variâncias são iguais, vamos estimar uma só variância.

Variância comum: $$S_p^2=\frac{(n-1) S_X^2+(m-1) S_Y^2}{n+m-2}$$

Teste duas médias com variâncias iguais

1) **Hipóteses** $H_0: \mu_X = \mu_Y \quad H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

2) **Estatística do teste:** $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S_p^2\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}\right)}}$

sob H0 $T \sim t_{n+m-2}$

3) **Rejeito** $H_0: \mu_X = \mu_Y$ **se |T|> t$_c$**

4) **Valor-p = 2P(T>|Tobs|)**

5) **Escolho** α **=nível de sig.**

6) **Se Valor-p<** α **=> Rejeito** $H_{0.}$

Saída do teste do gnumeric

Teste t	X = Antigo	Y= Novo
Média	7.25	8.15
Variância	3.01	1.34
Observações	10	10
Variância Combinada	2.175	
Hipótese de Diferença entre Médias	0	
Diferença entre Médias Observada	-0.9	
df	18	
t Stat	-1.3646	
P (T<=t) monocaudal	0.0946	
t Crítico monocaudal	1.7341	
P (T<=t) bicaudal	0.1892	
t Crítico bicaudal	2.1009	

Valor p= 0,1892 => Não rejeito $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

As médias não tem diferença significativa (p=0,1892)

Teste duas médias com variâncias diferentes

1) Hipóteses $H_0: \mu_X = \mu_Y$ $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

2) Estatística do teste:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$$ **sob H0, T ~ t com v graus de lib.**

$$\nu = \frac{[(s_X^2/n) + (s_Y^2/m)]^2}{[(s_X^2/n)^2/(n-1) + (s_Y^2/m)^2/(m-1)]}.$$

3) Rejeito $H_0: \mu_X = \mu_Y$ **se |T| > t_c**

4) Valor-p = 2P(T>|Tobs|)

5) α **=nível de sig. Se Valor-p<** α **=> Rej** H_0.

Teste duas médias com variâncias diferentes

	X = Antigo	*Y= Novo*	
Média	7.25	8.15	
Variância	3.0139	1.3361	
Observações	10	10	
Hipótese de Diferença entre Médias	0		
Diferença entre Médias Observada	-0.9		
df	15.6690		
t Stat	-1.3646		
P (T<=t) monocaudal	0.0958		
t Crítico monocaudal	1.7481		
P (T<=t) bicaudal	**0.1917**		**Não rej. H0**
t Crítico bicaudal	2.1236		**Tc=2,12**

Não há diferença significativa entre as médias usando os dois métodos (p=0,1917).

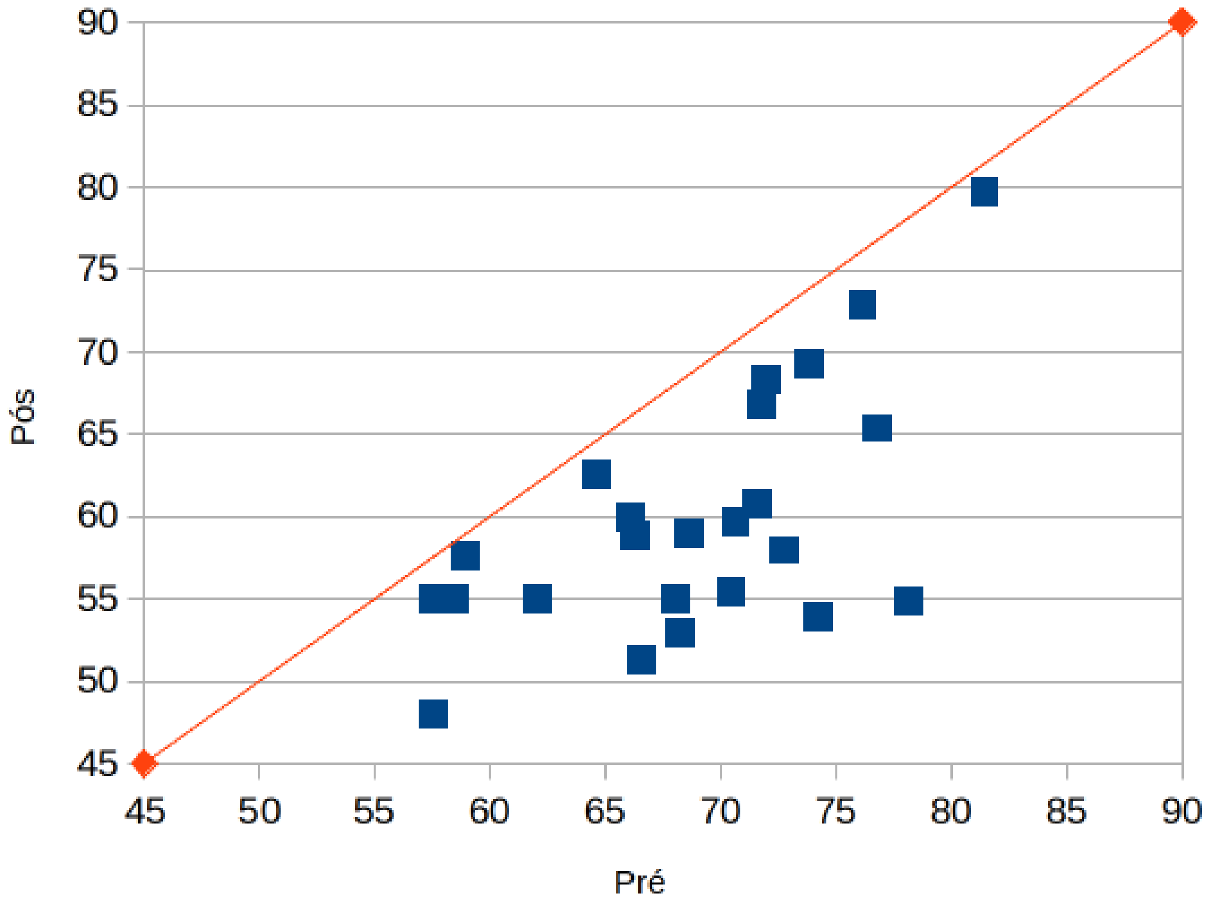
Teste t pareado

Uma amostra de n unidades amostrais e são feitas as medidas X e Y em cada unidade.

As medidas são ditas pareadas.

Medidas feitas antes e depois de uma cirurgia

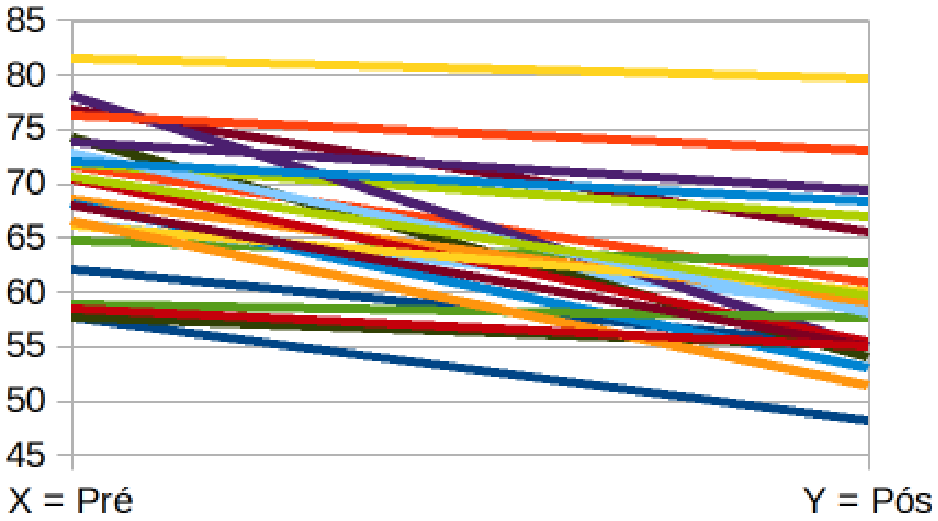
Aluno	X = Pré	Y = Pós	Diferença=X-Y
1	62.0	55.0	7.0
2	71.5	60.8	10.7
3	81.4	79.7	1.7
4	64.6	62.6	2.0
5	76.7	65.4	11.3
6	66.2	58.9	7.3
7	74.2	54.0	20.2
8	71.7	66.8	4.9
9	78.1	54.9	23.2
10	68.6	59.0	9.6
11	70.4	55.4	15.0
12	68.2	53.0	15.2
13	57.5	48.0	9.5
14	76.1	72.9	3.2
15	66.0	60.0	6.0
16	58.9	57.6	1.3
17	68.0	55.0	13.0
18	72.7	58.0	14.7
19	57.5	55.0	2.5
20	70.6	59.7	10.9
21	73.8	69.3	4.5
22	66.5	51.3	15.2
23	58.4	55.0	3.4
24	71.9	68.4	3.5



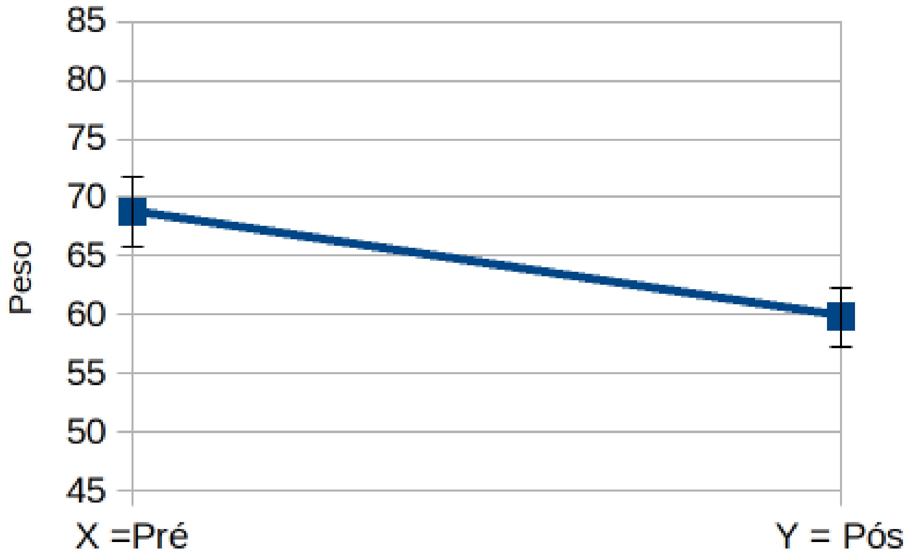
Aluno	X = Pré	Y = Pós	Diferença=X-Y
1	62.0	55.0	7.0
2	71.5	60.8	10.7
3	81.4	79.7	1.7
4	64.6	62.6	2.0
5	76.7	65.4	11.3
6	66.2	58.9	7.3
7	74.2	54.0	20.2
8	71.7	66.8	4.9
9	78.1	54.9	23.2
10	68.6	59.0	9.6
11	70.4	55.4	15.0
12	68.2	53.0	15.2
13	57.5	48.0	9.5
14	76.1	72.9	3.2
15	66.0	60.0	6.0
16	58.9	57.6	1.3
17	68.0	55.0	13.0
18	72.7	58.0	14.7
19	57.5	55.0	2.5
20	70.6	59.7	10.9
21	73.8	69.3	4.5
22	66.5	51.3	15.2
23	58.4	55.0	3.4
24	71.9	68.4	3.5

Medidas pré e pós

Perfis Individuais



Perfis médios (±¿2EP)



Teste t pareado

Paired t-test		
Alpha	0.05	
Hypothesized Mea	0	
	X =Pré	Y = Pós
Mean	68.81	59.82
Variance	43.82	54.67
Observations	24	24
Pearson Correlati	0.627323967	
Observed Mean D	8.99	
Variance of the Di	37.08	
df	23	
t Stat	7.2338	
P (T<=t) one-tail	**0.0000**	**1.15E-07**
t Critical one-tail	1.7139	
P (T<=t) two-tail	0.0000	2.31E-07
t Critical two-tail	2.0687	

Rejeitamos H0

O peso médio pós cirurgia é menor do que antes (p<0,0001).

Bibliografia

Bussab e Morettin. Estatística Básica.