Intervalo de confiança para a Proporção populacional p

Airlane P. Alencar – IME-USP

A proporção populacional de infectados na população é desconhecida.
Só se fizermos um censo e contarmos o número de infectados, poderíamos calcular a proporção populacional de infectados p, ou seja, o número de infectados dividido pelo tamanho da população.

Temos amostra aleatória de tamanho **n**.

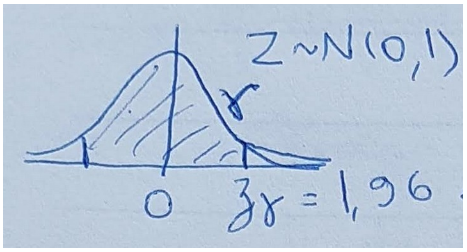
Usamos a proporção amostral $\hat{p}=\frac{número\,de\,infectados\,na\,amostra}{n}$ para estimar a proporção populacional p.

Para **n grande**, temos a aproximação para a **distribuição normal**: $\hat{p}\approx N\left(p,\frac{p(1-p)}{n}\right)$

Obtemos o Intervalo de confiança para p, com **coeficiente de confiança** γ :

IC = $\left[\hat{p}\mp z_{\gamma}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]=[\hat{p}\mp e]$

Chamamos $e=z_{\gamma}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ de **erro amostral**.



Em geral, o coeficiente de confiança é $\gamma=95\%$ e obtemos z=1,96 de modo que P(-1,96 <Z<+1,96)=0,95.
Então o IC fica, IC= $\left[\hat{p}\mp 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

Tamanho da amostra n

Quero calcular o tamanho da amostra n para ter erro amostral igual a 2 pontos percentuais com coeficiente de confiança 95%. Não temos a proporção amostral $\hat{p}$.

$$e=z_{\gamma}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\Rightarrow n=\frac{z^2 p(1-p)}{e^2}$$

- Se não sabemos nada sobre a proporção populacional p, vamos considerar p=0,5, assim maximizamos p(1-p), que aparece na variância da proporção amostral.

$$n=\frac{z^2 p(1-p)}{e^2} \Rightarrow n=\frac{1{,}96^2 0{,}5^2}{0{,}02^2}=49^2=2401$$

- Se sabemos que $p \leqslant 0{,}3$, podemos usar p=0,3

$$n=\frac{z^2 p(1-p)}{e^2} \Rightarrow n=\frac{1{,}96^2 0{,}3\, 0{,}7}{0{,}02^2}=2017$$

Agora sabemos que $p \leqslant 0{,}3$ e obtemos amostra aleatória com n=2017. Observamos 544 infectados nessa amostra e obtemos a proporção amostral igual a 27% (544/2017) de infectados.
Obtemos o IC com coeficiente de confianca 95%:

IC= $[\hat{p} \mp 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}]=[0{,}27 \mp 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}27\, 0{,}73}{2017}}]=[0{,}27 \mp 0{,}019]=[0{,}251\,;0{,}289]$.

Interpretação de 95% de confiança: Se faço muitos intervalos de confiança, temos que em média 95% deles contém a verdadeira proporção populacional p.

Testes de Hipóteses Unicaudal para a proporção

Temos duas hipóteses:

Hipótese nula: H_0 : p = 0,3 e a Hipótese Alternativa: H_1 : p **<** 0,3

A **igualdade** deve estar sempre na hipótese nula!

A distribuição da proporção amostral para n grande é $\hat{p} \approx N(p, \frac{p(1-p)}{n})$ e

sob a hipótese nula temos $\hat{p} \approx N(0{,}3, \frac{0{,}3 . 0{,}7}{n})$.

Vamos supor que temos agora amostra aleatória com **n=1000.**

Vamos fixar a probabilidade do **Erro Tipo I = rejeitamos H0 quando H0 é verdade**.
Chamamos essa probabilidade de **nível de significância =** α .

Ideia: Como temos p **<** 0,3 na hipótese alternativa, faz sentido rejeitar H_0 se a proporção amostral for bem pequena, ie, bem menor que um valor p_c (p crítico).

Vamos fixar o nível de significância usual de **5%** e encontrar o **valor crítico** p_c .
Chamamos de **Região Crítica** a região em que rejeitamos H0, nesse exemplo a região crítica corresponde aos valores { $\hat{p} < p_c$ }.

$$\alpha = nível\, de\, significância = P(Rejeito\, H_0 | H_0\, verdade) = P(\hat{p} < p_c | p = 0{,}3) = 0{,}05$$

$$\alpha = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le \frac{p_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \middle| p = 0{,}3\right) = P\left(\frac{\hat{p}-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3 .\, 0{,}7}{1000}}} \le \frac{p_c-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3 .\, 0{,}7}{1000}}}\right) = P\left(Z \le \frac{p_c-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3 .\, 0{,}7}{1000}}}\right) = 0{,}05$$

Na tabela da normal padrão, obtemos $P(Z \le -1{,}645) = 0{,}05$.

Então $\frac{p_c - 0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3 .\, 0{,}7}{1000}}} = -1{,}645 \Rightarrow p_c = 0{,}3 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}3 .\, 0{,}7}{1000}} = 0{,}3 - 0{,}0238 = 0{,}2762.$

Construímos a região crítica e rejeitamos H_0 se a proporção amostral $\hat{p} < p_c = 0{,}2762.$

Depois que coletamos a amostra aleatória com n=1000, observamos 27% de infectados na amostra.

Então rejeitamos H0 pois $\hat{p} = 0{,}27 < 0{,}2762.$

Testes de Hipóteses Bicaudal para a proporção

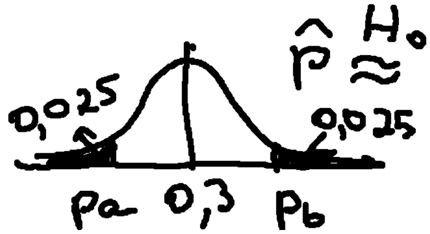
Temos duas hipóteses mas agora temos sinal de diferente em H_1 .

Hipótese nula: H_0 p = 0,3 e a Hipótese Alternativa: H_1 : $p \ne 0{,}3$

Novamente temos sob a hipótese nula $\hat{p} \approx N\left(0{,}3, \frac{0{,}3 .\, 0{,}7}{n}\right)$ e **n=1000**.

Ideia: Devido à hipótese alternativa, faz sentido rejeitar H0 se $\hat{p}$ for bem menor que 0,3 ou bem maior que 0,3.

Rejeitamos H_0 se $\hat{p} \le p_a$ ou $\hat{p} \ge p_b$ e escolhemos esses valores críticos fixando o $\alpha = 5\%.$



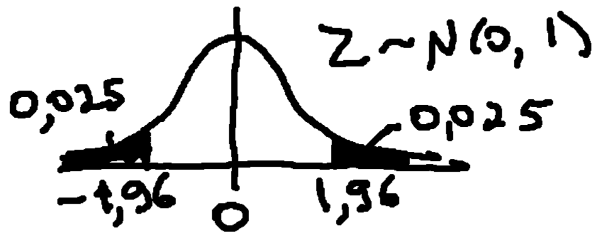
$\hat{p} \overset{H_0}{\approx} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

$p = 0{,}3$

$$\alpha = \text{nível de significância} = P(\text{Rejeito } H_0 | H_0 \text{ verdade}) = P(\hat{p} \leq p_a \text{ ou } \hat{p} \geq p_b | p=0{,}3) = 0{,}05$$

$$\alpha = P\left(\frac{\hat{p}-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{1000}}} \leq \frac{p_a-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{1000}}} \text{ ou } \frac{\hat{p}-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{1000}}} \geq \frac{p_b-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{1000}}}\right) = P\left(Z \leq \frac{p_a-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{1000}}} \text{ ou } Z \geq \frac{p_b-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{1000}}}\right) = 0{,}05$$

Desenhando a densidade da normal e olhando na tabela da normal, encontramos



$$P(Z \leq -1{,}96 \text{ ou } Z \geq +1{,}96) = 0{,}05$$

Então os valores da região crítica são

$$\frac{p_a-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{1000}}} = -1{,}96 \Rightarrow p_a = 0{,}3 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{1000}} = 0{,}3 - 0{,}028 = 0{,}272,$$

$$\frac{p_b-0{,}3}{\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{1000}}} = +1{,}96 \Rightarrow p_b = 0{,}3 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}3.0{,}7}{1000}} = 0{,}3 + 0{,}028 = 0{,}328.$$

Rejeitamos H_0 se $\hat{p} \leq 0{,}272$ ou $\hat{p} \geq 0{,}328.$

Se observamos a proporção amostral de 27% de infectados, rejeitamos H_0 com nível de significância 5%.

Valor p ou nível descritivo do teste para o teste unicaudal

Esse é outro modo de fazer o teste mas já temos que conhecer o valor observado para a estatística do teste, no nosso caso conhecer a estimativa da proporção amostral = 27%.

O valor p é a probabilidade de observarmos para a estatística de teste um valor mais extremo do que o valor que observamos.
Se o valor p < α =nível de significância, rejeitamos H_0 .

Suponha que n=1000 e já observamos a proporção amostral $\hat{p} = 0{,}27$.

Vamos fazer o teste unicaudal com H_0 : p = 0,3 e Hipótese Alternativa: H_1 : p **<** 0,3 valor p = $P(\hat{p} \leq 0,27 | p=0,3) = P\left(\frac{\hat{p}-0,3}{\sqrt{\frac{0,3.0,7}{1000}}} \leq \frac{0,27-0,3}{\sqrt{\frac{0,3.0,7}{1000}}}\right) = P(Z \leq -2,07) = 0,0192$

Como o valor p=0,0192 < 0,05, rejeitamos H_0 .

Conclusão: Há evidências de que a proporção de infectados é menor que 30% (p=0,0192).

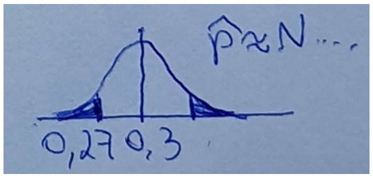
Valor p ou nível descritivo do teste para o teste bicaudal

Hipótese nula: H_0 H0: p = 0,3 e a Hipótese Alternativa: H_1 : $p \neq 0,3$

Para n=1000, observamos $\hat{p}=0,27$.

Agora rejeitamos H_0 para valores bem pequenos ou bem grandes da proporção amostral.

Então para considerar as duas caudas da distribuição, vamos ter que multiplicar por 2 a probabilidade que calculamos para o teste unicaudal $P(\hat{p} \leq 0,27 | p=0,3)$.



valor p = $2P(\hat{p} \leq 0,27 | p=0,3) = 2.0,0192 = 0,0384$.

Rejeitamos que a proporção de infectados seja 30% (p=0,0384).

Observações:

- Note que no teste unicaudal, para rejeitar H0 consideramos por exemplo $\hat{p} < p_c$ e uma só cauda da distribuição normal. No teste bicaudal, consideramos duas caudas.
- Tendo o valor p, o leitor pode usar outro nível de significância e tirar sua conclusão, mas é usual na literatura todos considerarem nível de significância 5%.
- Se diminuirmos o nível de siginificância, aumentamos a probabilidade do **erro tipo II**, que é a probabilidade de **aceitar** H_0 **quando** H_0 **é falsa**. Essa probabilidade é denotada como $\beta = P(aceitar\ H_0 | H_0 falsa)$.
- Chamamos de **poder do teste**: $Poder = P(rejeitar\ H_0 | H_0 falsa) = 1 - \beta$.