Transformada de Fourier: fundamentos matemáticos, implementação e aplicações musicais

MAC 0337 – Computação Musical

Jorge H. Neyra-Araoz
IME – USP

22/11/2007

Resumo

- Série de Fourier para funções periódicas
- Transformada de Fourier: definição e exemplo
- Transformada de Fourier Discreta
  - Tranformada Rápida de Fourier

Série de Fourier para funções periódicas

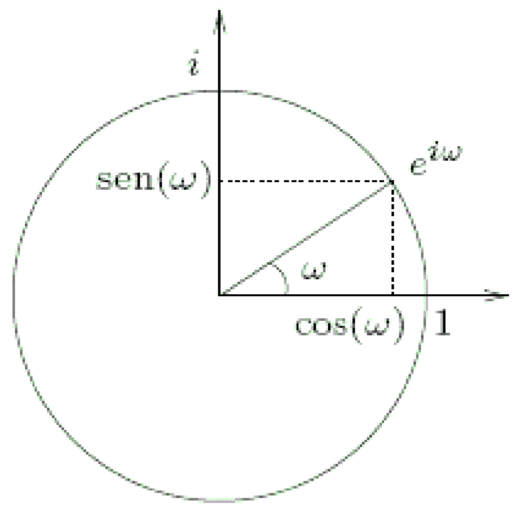
- A Série de Fourier é uma representação de uma função periódica como uma soma de funções periódicas:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \operatorname{sen}(\omega_i t) + b_i \cos(\omega_i t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ (freqüência angular) e } \omega_i = i\omega.$$

Série complexa de Fourier

- Segundo a *Fórmula de Euler*, as séries podem ser expressadas equivalemente



$$|e^{i\omega}| = \sqrt{\cos^2(\omega) + \mathrm{sen}^2(\omega)} = 1$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sen}(\omega)}{\cos(\omega)}\right) = \tan^{-1}\tan(\omega) = \omega$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ e } \omega_n = n\omega$$

Equações de Síntese e Análise

- Equação de Síntese: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\omega_n t}$

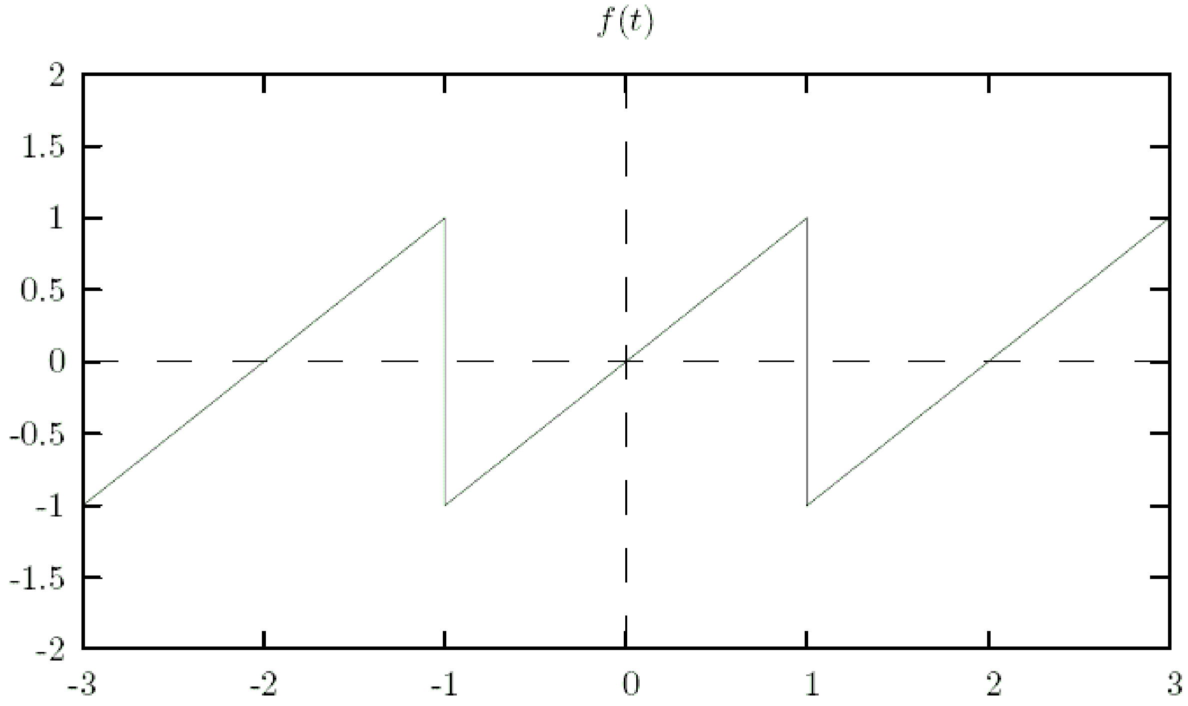
- Equação de Análise: $F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t}\, dt$

  - Uma propriedade fundamental dos valores de F_n é a seguinte:

$$F_{-n} = F_n^*.$$

Exemplo ...

Considere a função



Temos $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, $\omega_n = n\pi$. Para $n \neq 0$,

Exemplo ...(2)

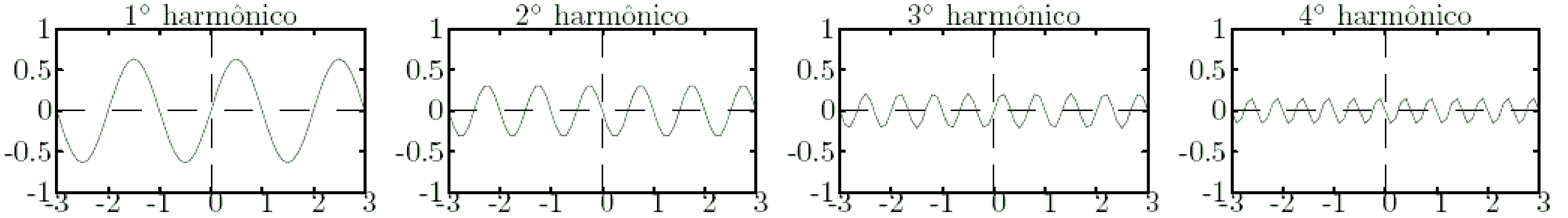
$$
\begin{aligned}
F_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega_n t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-i\omega_n t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \overbrace{t\cos(\omega_n t)}^{\text{ímpar}\Longrightarrow=0}\,dt - \frac{i}{2}\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{sen}(\omega_n t)\,dt \\
&= -i\int_{0}^{1} t\,\mathrm{sen}(\omega_n t)\,dt \\
&= -i\left[\frac{\mathrm{sen}(\omega_n t)}{\omega_n^2} - t\frac{\cos(\omega_n t)}{\omega_n}\right]_0^1 \\
&= -i\left[-\frac{(-1)^n}{n\pi}\right] = i\frac{(-1)^n}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Para $n = 0$, $F_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt = 0.$

Exemplo ...(3)

- O *n*-ésimo harmônico de *f* é dado por:

$$i\frac{(-1)^{-n}}{-n\pi}e^{-in\pi t} + i\frac{(-1)^n}{n\pi}e^{in\pi t} = i\frac{(-1)^n}{n\pi}[e^{in\pi t} - e^{-in\pi t}] = -2\frac{(-1)^n}{n\pi}\,\mathrm{sen}(n\pi t).$$



Transformada de Fourier

- Quando uma função $f(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é periódica é impossível escrevê-la como combinação linear de uma família de senos e cossenos harmonicamente relacionados.
- No entanto, muitas vezes é possível escrevê-la como combinação linear de todos os senos e cossenos que existem, utilizando todas as freqüencias $\omega \in \mathbb{R}$ disponíveis:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \quad \text{(equação de síntese)}$$

Transformada de Fourier (2)

- Para funções que satisfazem o critério

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(t))^2\, dt < \infty,$$

entre outras, pode-se provar que os valores de $F(\omega)$ que satisfazem a equação acima são dados por

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \quad \text{(equação de análise)}$$

Transformada Inversa de Fourier

- Se *F(ω)* e *f(t) estão relacionadas pelas equações de análise e síntese*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega.$$

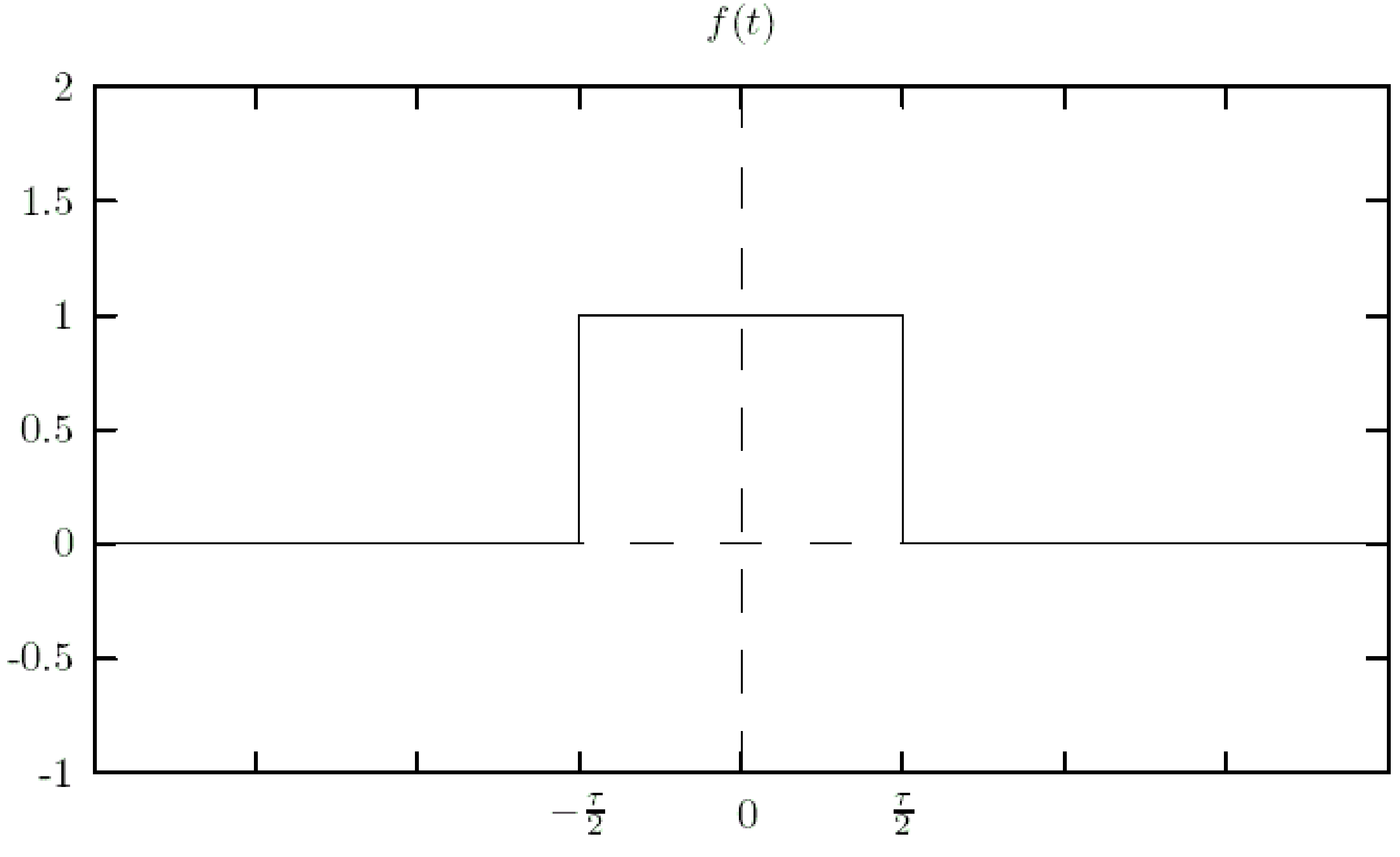
denotamos esta relação por

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega).$$

indicando que F é a Transformada de Fourier de f, e f é a Transformada Inversa de Fourier de F.

Transformada de Fourier: Exemplo

- Considere a função



Transformada de Fourier: Exemplo

- Para $\omega = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{\omega}\left[\frac{e^{i\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2i}\right] \\ &= \frac{2\,\mathrm{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega} = \tau\frac{\mathrm{sen}(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}}. \end{aligned}$$

- e para $\omega \neq 0$, temos que:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i0t}\, dt = \tau.$$

Transformada de Fourier: Exemplo

- Assim, pela equação de síntese,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \frac{\mathrm{sen}(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}} e^{i\omega t}\, d\omega.$$

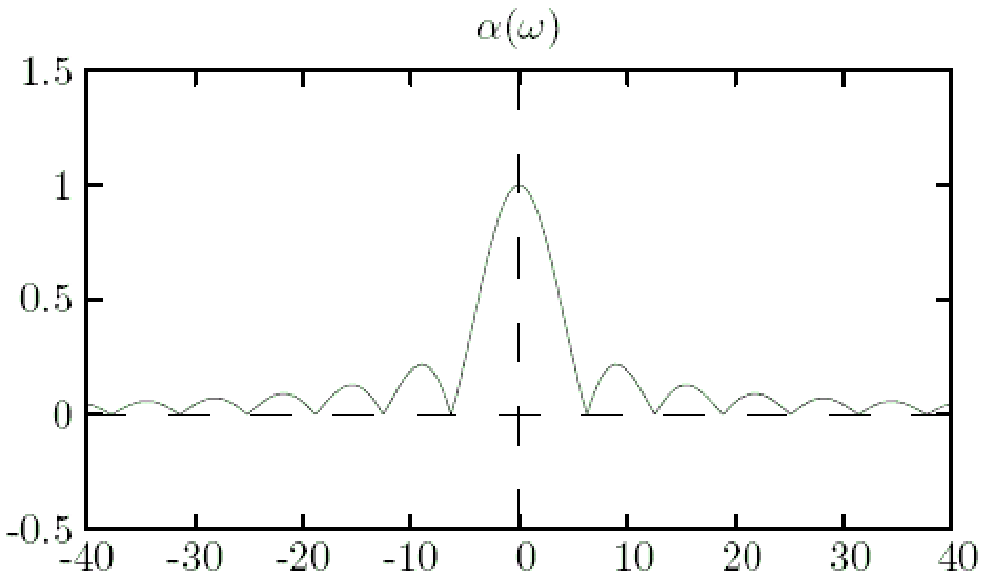
- Freqüentemente, representamos a transforma de Fourier através dos espectro de *amplitude* e *fase*.

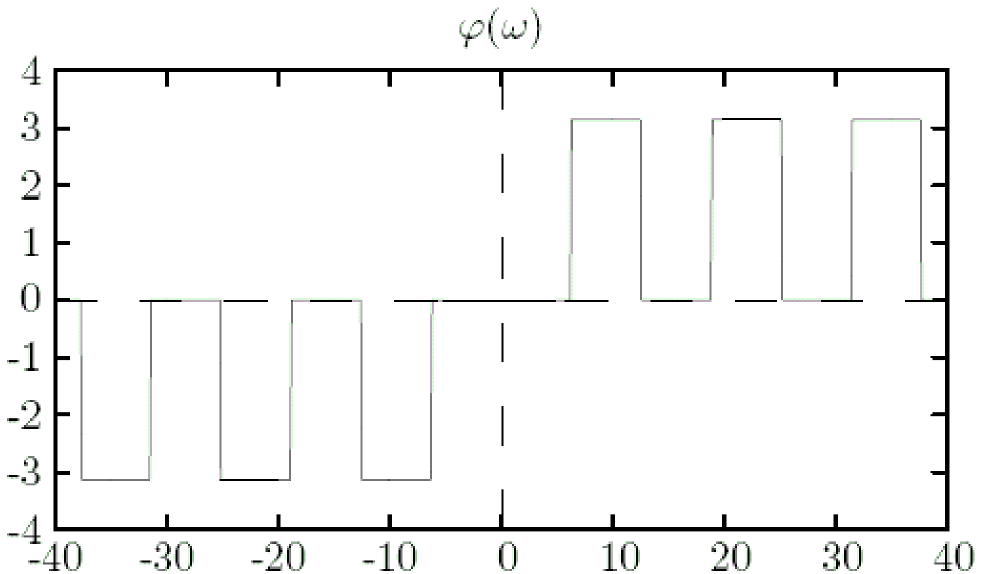
$$\alpha(\omega) = \tau \left| \frac{\mathrm{sen}(\omega \frac{\tau}{2})}{\omega \frac{\tau}{2}} \right|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } F(\omega) \geq 0 \\ \pm\pi, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Transformada de Fourier: Exemplo

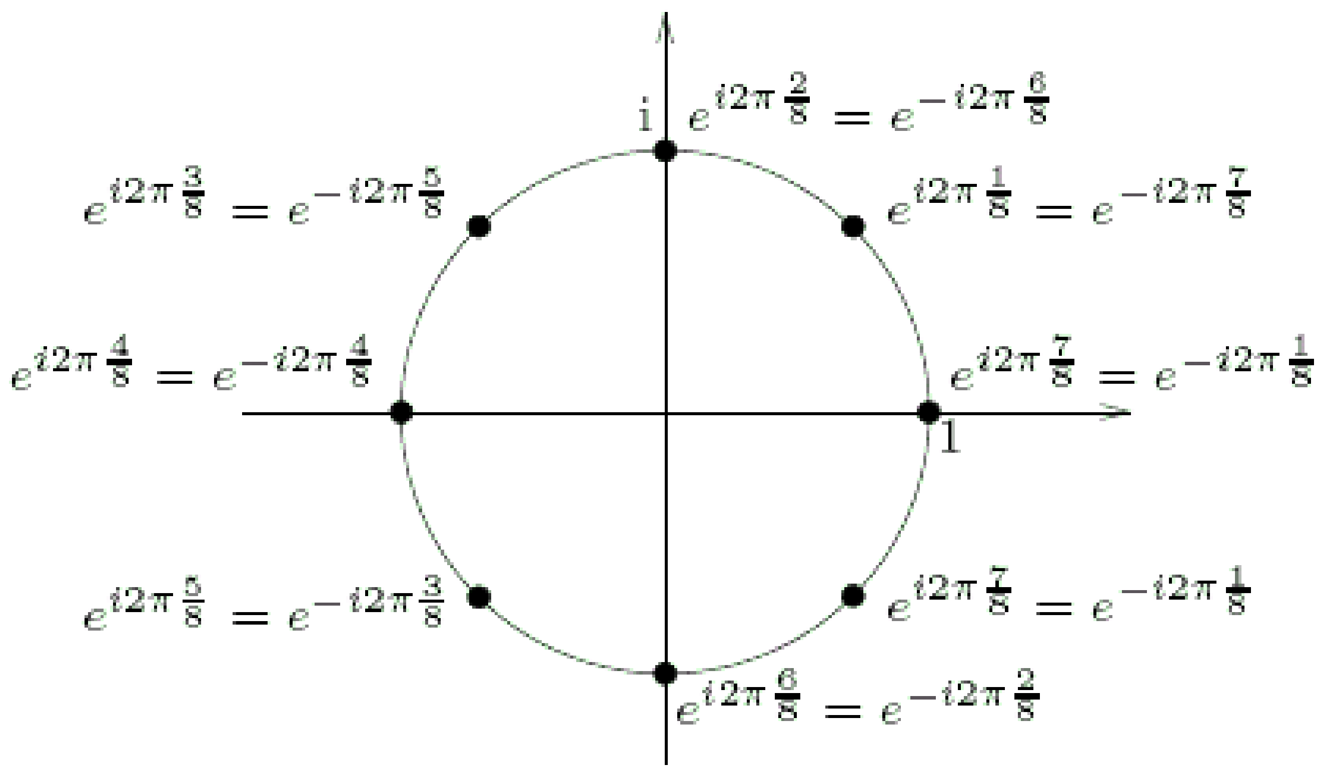
- A escolha entre $\pm\pi$ na expressão de $\varphi(\omega)$, embora arbitrária, deve preservar a propriedade de que $\varphi(\omega)$ é uma função ímpar.





Transformada de Fourier Discreta (DFT)

- Dado $N \in \mathbb{N}$, considere a família de números complexos $\left\{e^{i2\pi\frac{n}{N}} \mid n = 0, 1, \ldots, N-1\right\}$, que divide o círculo unitário em *N* partes iguais:



DFT: Relações de Ortogonalidade

- A família de número complexos anterior possui uma propriedade de ortogonalidade em relação ao produto interno em $\mathbb{C}^N$ definido por $$\langle a, b \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_k^*.$$
- Vamos utilizar o símbolo $W = e^{-i2\pi\frac{1}{N}}$ de tal forma que $$W^k = e^{-i2\pi\frac{k}{N}}.$$

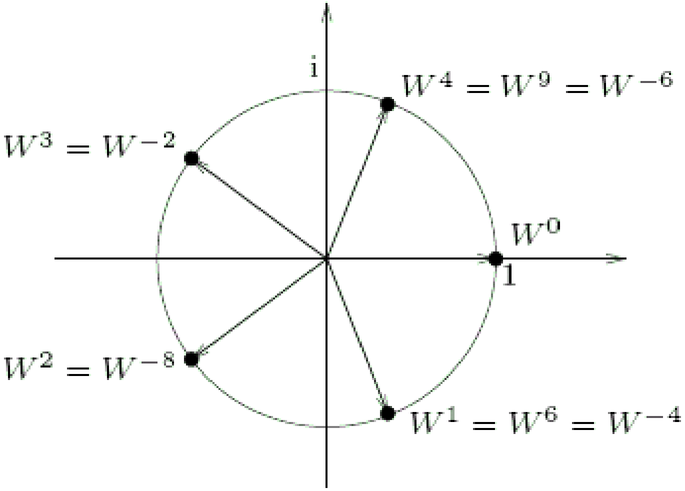
Lema (Relações de Ortogonalidade)

$$\sum_{k=0}^{N-1} W^{-qk}(W^{-rk})^* = \begin{cases} 0, & se\ q \neq r \\ N, & se\ q = r. \end{cases}$$

DFT: Exemplo

- Considere $N = 5$, $q = 2$ e $r = 3$. Então, para os vetores

$$a = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-2} \\ W^{-4} \\ W^{-6} \\ W^{-8} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} W^0 \\ W^{-3} \\ W^{-6} \\ W^{-9} \\ W^{-12} \end{bmatrix}$$



temos

$$\langle a,b\rangle = W^0W^0 + W^{-2}W^3 + W^{-4}W^6 + W^{-6}W^9 + W^{-8}W^{12} = 1 + W + W^2 + W^3 + W^4 = 0$$

$$\langle a,a\rangle = W^0W^0 + W^{-2}W^2 + W^{-4}W^4 + W^{-6}W^6 + W^{-8}W^8 = 1+1+1+1+1 = 5$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- O método de cálculo da transformada discreta de Fourier a partir da expressão

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W^{kn},\ n = 0, \ldots, N-1$$

  utiliza N^2 produtos entre números complexos e $N(N-1)$ somas, possuindo assim complexidade computacional $\mathcal{O}(N^2)$.

- O método FFT permite obter o mesmo resultado em tempo $\mathcal{O}(N \log N)$.

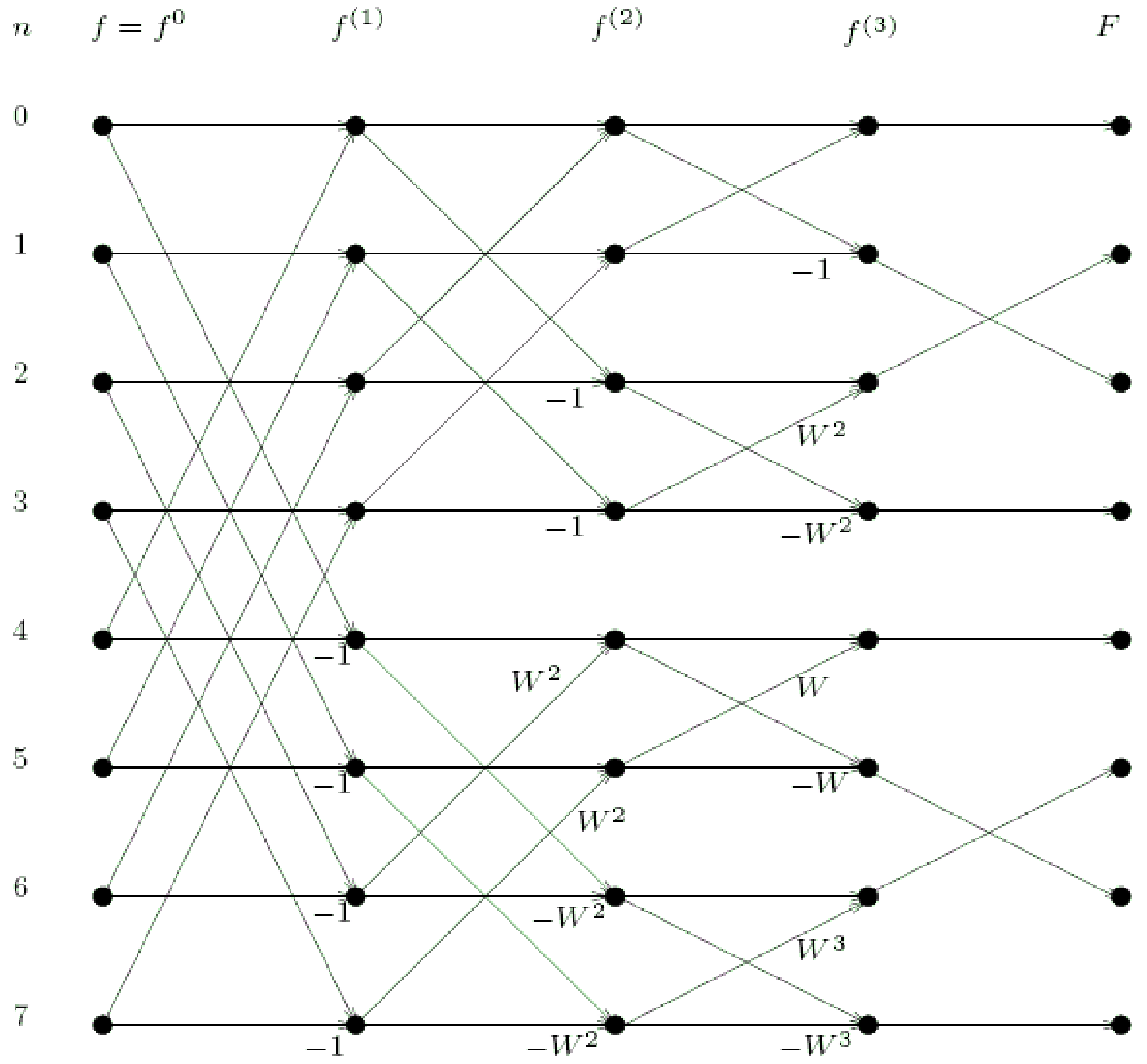
FFT: Implementação

- Existem muitas implementações:
  - Mapeamento em Índices Multidimensionais, transforma uma DFT de uma dimensão em uma DFT de duas ou mais dimensões.
  - Algoritmo COOLEY-TURKEY: usa o mapeamento de índices os índices de tempo e de freqüência.
  - FFT por Dizimição no Tempo, descompõe a seqüência de tamanho N em seqüências sucessivas menores.

FFT: Implementação

- FFT por dizimição em Freqüência
  - A mais común e a mais eficiente forma de FFT.
  - Usa todas as dimensões do mesmo tamanho.
  - Calcula uma DFT de tamanho N, em termos de duas DFTs de tamanho N/2.

FFT: ilustração de três etapas



FFT: Exemplo

- Consider o vetor $f = f^{(0)} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)' \in \mathbb{R}^8$. Sua transformada de Fourier discreta poder ser calculada com auxílio do diagrama do FFT do slide anterior.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
f = f^{(0)} & & f^{(1)} & & f^{(2)} & & f^{(3)} & & F \\
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \longrightarrow &
\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \longrightarrow &
\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \longrightarrow &
\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \longrightarrow &
\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

FFT: Algoritmo

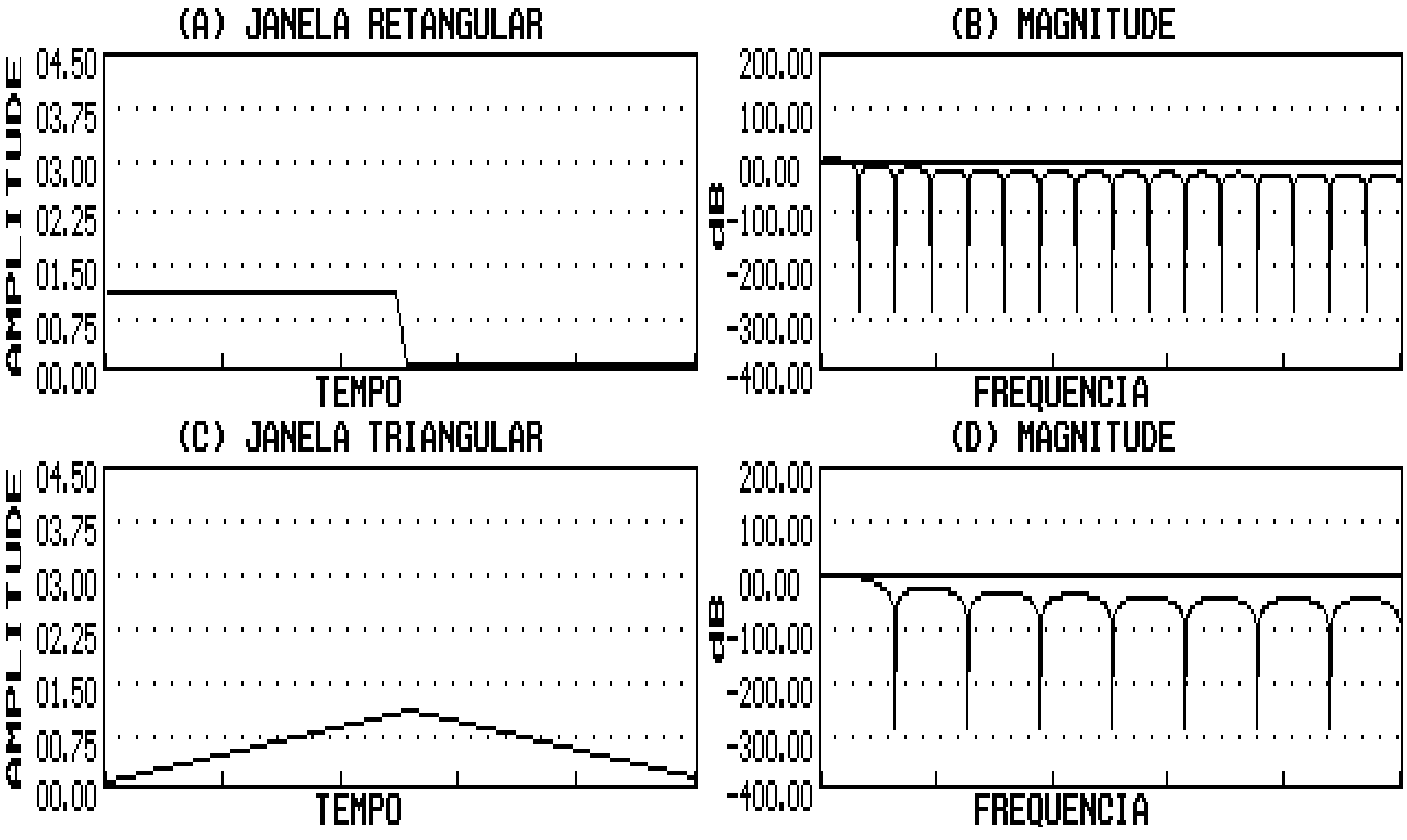
RECURSIVE-FFT(a)

$n \leftarrow length[a]$ $\triangleright$ n is a power of 2.
if $n = 1$
  then return a
$\omega_n \leftarrow e^{2\pi i/n}$
$\omega \leftarrow 1$
$a^{[0]} \leftarrow (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2})$
$a^{[1]} \leftarrow (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1})$
$y^{[0]} \leftarrow$ RECURSIVE-FFT$(a^{[0]})$
$y^{[1]} \leftarrow$ RECURSIVE-FFT$(a^{[1]})$
for $k \leftarrow 0$ **to** $n/2 - 1$
  do $y_k \leftarrow y_k^{[0]} + \omega\, y_k^{[1]}$
    $y_{k+(n/2)} \leftarrow y_k^{[0]} - \omega\, y_k^{[1]}$
    $\omega \leftarrow \omega\, \omega_n$
return y $\triangleright$ y is assumed to be a column vector.

Janelas

- Também chamadas *Funções de Ponderação*.
- Modificam as características de resposta em freqüência dos algoritmos de DFT.
- Usadas em conjunto com análise espectral via DFT para reduzir o espalhamento em freqüência.

Janela Rectangular e Triangular



Aplicações da FT

- A Transfomada de Fourier (FT) é uma ferramenta largamente empregada em processamento de sinais (sons, imagens).
- A teoria de Fourier demonstrou que um som periódico (como os sons instrumentais utilizados na música) podia decompor-se numa soma de sons puros (sinusoidais) de frequência 1f, 2f, 3f,...

Aplicações da FT

- Usado amplamente no análise, síntese, e processamento de voz e sons musicais.
- Pode ser usada para obter o Espectro a partir da Forma de Onda.

Obrigado