

Lista 3 - Álgebra linear- T2

Curso de verão 2018 - IME-USP

Professor: Diego Alfonso Sandoval Salazar

Tema: Determinantes, semelhança, diagonalização, produtos internos e ortogonalidade.

1. Seja A a matriz sobre K dada por $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que $\det A = 0$.

2. Sejam $A \in M_{r \times r}(\mathbb{R})$, $B \in M_{r \times s}(\mathbb{R})$, $C \in M_{s \times s}(\mathbb{R})$ e $0 \in M_{s \times r}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\text{Det} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(C).$$

3. Use o exercício anterior para calcular o determinante de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Mostre que o determinante da matriz de *Vandermonde*

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{é } (b-a)(c-a)(c-b).$$

5. Usar a fórmula da adjunta para calcular as inversas das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Calcule os seguintes determinantes

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \text{(c)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} & \text{(e)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} & \text{(g)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \text{(d)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} & \text{(f)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} & \end{array}$$

7. Use a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas de equações lineares sobre o corpo dos reais

(a)

$$\begin{aligned}x + y + z &= 11 \\2x - 6y - z &= 0 \\3x + 4y + 2z &= 0\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}3x + y - z &= 0 \\x + y + z &= 0 \\y - z &= 0\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}4x + y + z + w &= 1 \\x - y + 2z - 3w &= 0 \\2x + y + 3z + 5w &= 0 \\x + y - z - w &= 2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}3x - 2y &= 7 \\3y - 2z &= 6 \\3z - 2y &= -1\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}2x - y + z &= 1 \\x + 3y - 2z &= 0 \\4x - 3y + z &= 2\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z + 5w &= 0 \\2x + y - 4z - w &= 1 \\x + y + z + w &= 0 \\-x - y - z + w &= 4\end{aligned}$$

8. Sejam A e B matrizes $n \times n$ diagonalizáveis sobre o corpo K . Mostre que se A e B comutam então existe P uma matriz $n \times n$ invertível tal que $P^{-1}AP$ e $P^{-1}BP$ são matrizes diagonais.
9. Sejam A_1 e A_2 matrizes nilpotentes de tamanho 3×3 sobre o corpo K . Mostre que A_1 e A_2 são semelhantes se, e somente se elas tem o mesmo polinômio minimal.
10. Sejam $A, B \in M_{n \times n}(K)$. Mostre que se A e B são matrizes semelhantes então $Tr(A) = Tr(B)$. Onde $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.
11. Prove se M e N são matrizes $n \times n$ tais que $M^n = 0 = N^n$ e $M^{n-1} \neq 0, N^{n-1} \neq 0$. Mostre que M e N são semelhantes.
12. Suponhamos que $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica. Mostre que A é semelhante a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
13. Seja $N \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ tal que $N^2 = 0$. Mostre que $N = 0$ ou N é similar sobre $\mathbb{C}$ a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
14. Use o exercício anterior, para provar que se $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ então A é semelhante a uma das seguintes matrizes $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$.
15. Se V é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial e P é um operador linear tal que $P^2 = P$. Mostre que $I + P$ é invertível e determine $(I + P)^{-1}$.
16. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K e sejam $W_1, \dots, W_k$ subespaços de V . As seguintes afirmações são equivalentes:
 - (a) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$;
 - (b) Se β_i é uma base para $W_i, i = 1, \dots, k$ então $\beta = \cup_{j=1}^k \beta_j$ é uma base para V .
 - (c) Para cada $j \in \{2, \dots, k\}$ temos $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1}) = 0$.
17. Seja $V = M_{n \times n}(K)$ o espaço das matrizes quadradas de tamanho $n \times n$ sobre o corpo K . Considere o subespaço W_1 das matrizes simétricas e W_2 o subespaço das matrizes anti-simétricas. Mostre que $V = W_1 \oplus W_2$.

18. Mostre o teorema de Cayley-Hamilton: *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear no K -espaço vetorial V de dimensão n (ou seja, $A = [T]_{\beta} \in M_{n \times n}(K)$ a matriz que representa T em alguma base β de V). Considere p o polinômio característico de T ($p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$). Então $p(T) = 0$ ($p(A) = 0$).*
19. Use o teorema de Cayley-Hamilton para mostrar
- (a) O polinômio minimal divide o polinômio característico de T .
 - (b) Os valores próprio de T são as raízes do polinômio minimal.
 - (c) O polinômio minimal e característico tem as mesmas raízes.
20. Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear diagonalizável no K -espaço vetorial V de dimensão finita com valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distintos de T . Então, existem operadores lineares $P_1, \dots, P_k$ em V tais que
- (a) $T = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_k P_k$,
 - (b) $I = P_1 + \dots + P_k$,
 - (c) $P_j P_i = 0$ para $i \neq j$,
 - (d) $P_i^2 = P_i$,
 - (e) $\text{Im } P_i = \ker(T - \lambda_i I) : E_{\lambda_i}$.
21. Se A e B são matrizes $n \times n$ sobre o corpo K . Então AB e BA têm os mesmos valores próprios.
22. Mostre que se λ é um valor próprio da matriz A sobre o corpo K então $p(\lambda)$ é um valor próprio de $p(A)$, onde $p(x) \in K[x]$.
23. Determine os polinômios característico e minimal da matriz real $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$.
24. Ache os polinômios característico e minimal da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$.
25. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Qual é o polinômio minimal para o operador identidade e do operador nulo?
26. Seja $V = \mathbb{C}_n[x]$ e o operador diferenciação D sobre V . Qual é o polinômio mínimo e característico para D ?
27. Seja $A \in M_{n \times n}(K)$ cujo polinômio característico é $p(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \dots (x - \lambda_k)^{d_k}$. Mostre que a $\text{Tr}(A) = \lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_k d_k$.
28. Seja $V = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é continua} \}$. Mostre que o operador linear $T : V \rightarrow V$ definido por $(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$ não possui valores próprios.
29. Sejam $V = M_{n \times n}(K)$ e Auma matriz fixa de V . Definimos o operador T sobre V por $T(B) = AB$. É verdade que A e T tem os mesmos valores próprios?

30. Determine quais das seguintes matrizes são diagonalizáveis sobre o corpo $\mathbb{R}$ e sobre o corpo $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

31. Diagonalizar ortogonalmente as seguintes matrizes sobre o corpo $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

32. Seja $T : K^n \rightarrow K^n$ um operador linear e consideramos que é representado na base ordenada canônica pela matriz dada. Nos seguintes casos mostre que T é diagonalizável exibindo uma base formada por vetores próprios de T e sua forma diagonal.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad K = \mathbb{C}, n = 2 \text{ e } & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. & \text{(c)} \quad K = \mathbb{R}, n = 3 \text{ e } & \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -8 & -4 & 7 \end{bmatrix}. \\ \text{(b)} \quad K = \mathbb{R}, n = 3 \text{ e } & \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

33. Seja T um operador linear sobre $\mathbb{C}^4$ que é representado na base canônica pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$.

Achar condições sobre a, b, c para que T seja diagonalizável.

34. Mostre que toda matriz $A \in M_{n \times n}(K)$ tal que $A^2 = A$ é diagonalizável.

35. Seja T um operador linear sobre $\mathbb{R}^2$ que tem como vetores próprios $(3, 1)$ e $(-2, 1)$ associados aos valores próprios -2 e 3 , respectivamente. Calcule $T(x, y)$.

36. Seja T e L operadores sobre V . Suponhamos que v é um vetor próprio de T e L associados aos valores próprios λ_1 e λ_2 , respectivamente. Ache valores próprios para de $L \circ T$ e $\alpha L + \beta T$, onde α, β são reais.

37. Seja $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, cuja matriz em relação a base

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{é dada por } [T]_S = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Determine uma matriz invertível } M \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$$

tal que $M^{-1}[T]_S M$ seja diagonal.

38. Seja V o espaço vetorial das funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Consideramos o subespaço W gerado pelo conjunto $S = \{e^{2x} \sin x, e^{2x} \cos x, e^{2x}\}$ e o operador derivação D sobre W .

- (a) A matriz de D com relação a base S .
- (b) Os valores próprios de D e as funções de W que são os vetores próprios de D .
39. Seja um espaço vetorial com produto interno. definimos a distância entre dois vetores $x, y \in V$ por $d(x, y) = \|x - y\|$. Dê as seguintes questões:
- (a) $d(x, y) \geq 0$,
- (b) $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.
- (c) $d(x, y) = d(y - x)$.
- (d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
40. Encontre um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 2$.
41. Seja V um espaço vetorial real normado tal que para qualquer $x, y \in V$ se satisfaz $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Mostre que $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $2f(x, y) = \|x + y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2$ é um produto interno de V que induz a norma $\|\cdot\|$.
42. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre o espaço vetorial V munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Mostre que se $\|Tv\| = \|v\|$ para qualquer $v \in V$, então $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$, para qualquer $x, w \in V$.
43. Seja V um espaço vetorial munido do produto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Demonstrar que se $x, y \in V$, $x = y$ se, e somente se $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle$ para qualquer $z \in V$.
44. Seja $V = M_{n \times n}(\mathbb{C})$ o espaço das matrizes quadradas de tamanho $n \times n$ com entradas complexas. Considere o produto interno dado por $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^*)$.
- (a) Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ acima é um produto interno.
- (b) Determine o complemento ortogonal das matrizes diagonais.
45. Considere $V = \mathbb{R}_3[x]$ o espaço dos polinômios com entradas reais de grau menor ou igual a 3 munido do produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.
- (a) Determine o complemento ortogonal dos polinômios escalares (constantes ou $\mathbb{R}$).
- (b) Determine uma base ortogonal de V a partir da base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
46. Seja S um subconjunto não-vazio de um espaço vetorial V com produto interno. Mostre que $(S^\perp)^\perp$ contém o subespaço gerado por S . Quando V tem dimensão finita mostre que $(S^\perp)^\perp = \text{Span } S$.
47. Seja $V = \mathcal{C}_0([-1, 1], \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[-1, 1]$ com valores em $\mathbb{R}$, considere o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

Seja W o subespaço vetorial das funções ímpares, isto é, as funções que satisfazem $f(-t) = -f(t)$. Determine o complemento ortogonal de W .

48. Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$. Definimos $\text{Lin}(A)$ como o espaço vetorial gerado pelas linhas de A , $\text{Col}(A)$ o espaço vetorial gerado pelas colunas de A e $\text{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$. Mostre que $(\text{Lin}(A))^\perp = \text{Nul}(A)$ e $(\text{Col}(A))^\perp = \text{Nul}(A^T)$.

49. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal para V , T um operador linear sobre V e $A = [T]_S$. Prove que $a_{ij} = \langle Tv_j, v_i \rangle$.
50. Considere $\beta = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Construa uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual.
51. Seja V um espaço vetorial sobre K de dimensão finita munido do produto interno $\langle, \rangle$. Suponha $T : V \rightarrow V$ um operador linear tal que $T^2 = T$. Mostre que $T = T^*$ se, e somente se $TT^* = T^*T$.
52. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear sobre o espaço vetorial V de dimensão finita sobre o corpo dos números complexos, munido de um produto interno. Mostre que
- (a) $[T]_\beta^* = [T^*]_\beta$, onde β é uma base ortogonal de V .
 - (b) $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ para todo $x, y \in V$.
 - (c) $T^*(V) = (\ker T)^\perp$.
53. Seja $V = \mathbb{C}^2$ munido com o produto interno canônico. Seja T o operador definido por $T(1, 0) = (1, -2)$ e $T(0, 1) = (i, -1)$. Determine T^* .
54. Seja $V = \mathbb{C}^3$ munido com o produto interno canônico. Considere T o operador linear sobre V cuja matriz associada em relação à base canônica é dada por $A_{ij} = (i)^{i+j}$. Determine uma base para o $\ker T^*$ e para $\operatorname{Im} T^*$.
55. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno e T um operador linear sobre V . Se T é invertível, então $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.
56. Seja $V = \mathbb{R}_3[x]$ com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ e D o operador derivação sobre V . Ache D^* .
57. Sejam $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ munido do produto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(B^*A)$ e $M \in V$. Se $T : V \rightarrow V$ é definido por $T(A) = MA - MA$ para $A \in V$. Ache T^* .
58. Sejam $V = M_{n \times n}(K)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas sobre o corpo K e $n \in \mathbb{Z}^+$. Mostre que
- (a) $(P^{-1}AP)^n = (P^{-1})A^nP$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A \in V$, sendo P qualquer matriz invertível.
 - (b) Seja $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in K[x]$ então $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$, onde $P \in V$ invertível.
59. Seja W um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial V com produto interno. Consideremos P a projeção ortogonal de V sobre W . Mostre que $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ para todo $x, y \in V$.
60. Seja V um K -espaço vetorial com produto interno. Para $v, w \in V$, define-se $T \in \mathcal{L}(V, V)$ por $T_{v,w}(u) = \langle u, w \rangle v$. Mostre
- (a) $(T_{v,w})^* = T_{w,v}$.
 - (b) $T_{v,w}T_{x,y} = T_{v, \langle w, x \rangle y}$.
 - (c) Se V tem dimensão finita, então $\operatorname{Tr}(T_{v,w}) = \langle v, w \rangle$?