Lista 2 - Álgebra linear- T2

Curso de verão 2018 - IME-USP

Professor: Diego Alfonso Sandoval Salazar

Tema: Espaços vetoriais, subespaços, base e dimensão, Transformações lineares

1. Estude se os seguintes são espaços vectoriais
   (a) O conjunto de todos os vetores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que $x,\, y \geq 0$
   (b) O conjunto de todos os vetores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que $xy \geq 0$.
   (c) O conjunto de todos os vetores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \geq y$.
   (d) O conjunto de todos los números racionais com a soma e produto usuais.
   (e) O conjunto de todas as matrizes triangulares superiores.
   (f) O conjunto de todas las matrizes de 2×2 da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $ad = 0$.
   (g) O conjunto de todas as matrizes antisimétricas de $n \times n$.

2. Seja $K = \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$.Considere $K^\infty = \{(a_1, a_2, \cdots) : \ a_i \in K\}$ com a soma $(a_1, a_2, \cdots) + (b_1, b_2, \cdots) = (a_1 + b + 1, a_2 + b_2, \cdots)$e a multiplicação $\alpha(a_1, a_2, \cdots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \cdots)$. Responda as seguintes questões
   (a) Prove que K^∞ é um $K-$espaço vetorial.
   (b) Considere o subconjunto de K^∞ dado por
   $$W = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^\infty : \ (x_n) \to 0\}.$$
   Mostre que W é um subespaço vetorial de K^∞.
   (c) Considere $l_\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^\infty : \ (x_n) \text{ seja limitada}\}$. W é um subespaço vetorial? Prove ou de um contra-exemplo.

3. Em $\mathbb{C}^n$, definimos as operações $v \oplus w = v - w$ e $\alpha \cdot v = -\alpha v$. Neste caso, $\mathbb{C}^n$ com estas operações é um espaço vetorial?

4. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 0\}$ um plano do $\mathbb{R}^3$. Mostre que S é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

5. Seja V um espaço vetorial.
   (a) Mostre que $0 \cdot v = 0_V$ para todo vetor $v \in V$ e $\alpha \cdot 0_V = 0_v$ para toda $\alpha \in K$.
   (b) Mostre que se $\alpha \cdot v = 0_V$ então $\alpha = 0_K$ ou $v = 0_V$.

6. Seja $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \ ab > 0\}$ e definimos as operações $(a, b) \oplus (c, d) = (ac, bd)$ e $\alpha \cdot (a, b) = (a^\alpha, b^\alpha)$. Prove que Vmunido com estas operações é um espaço vetorial.

7. Determine se W é um subespaço de V .
   (a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \ : \ a \in \mathbb{R} \right\}$, (b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \ : \ a \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $V=\mathbb{R}^3$, $W=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$

(d) $V=\mathbb{R}^3$, $W=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ |a| \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$

(e) $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$

(f) $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad\geq bc\right\}$

(g) $V=M_{n\times n}$, $W=$ matrizes diagonais de $n\times n$

(h) $V=M_{n\times n}$, $W=\{A:\ A^2=A\}$

8. Seja B uma matriz fixa de $n\times n$ e considere o conjunto $W=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{R}):\ AB=BA\}$. É W um subespaço de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$?.

9. Determine se W é subespaço de V.

   (a) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $W=\{bx+cx^2:\ b,c\in\mathbb{R}\}$,
   (b) $V=K_2[x]$, $W=\{a+bx+cx^2:\ a+b+c=0\}$
   (c) $V=K_2[z]$, $W=\{a+bx+cx^2:\ abc=0\}$
   (d) $V=K_3[x]$, $W=K_2[x]$,
   (e) $V=K[x]$, $W=K_3[x]$,
   (f) $V=K_{n+k}[x]$, $W=K_k[x]$
   (g) ,$V=\mathcal{C}(\mathbb{R})$, $W=\{f\in V:\ f(-x)=f(x)\}$,
   (h) $V=\mathcal{C}(\mathbb{R})$, $W=\{f\in V:\ f(-x)=-f(x)\}$
   (i) $V=\mathcal{C}(\mathbb{R})$, $W=\{f\in V:\ f(0)=1\}$
   (j) $V=\mathcal{C}(\mathbb{R})$, $W=\{f\in V:\ f(0)=0\}$

10. Seja V um espaço vectorial com subespaços U e W

    (a) Demonstrar que $U\cap W$ é um subespaço.
    (b) Encontrar um contraexemplo em $V=\mathbb{R}^2$ para ilustrar que não necessariamente $U\cup W$ é um subespaço.
    (c) Quais são as condições sobre U e W para que $U\cup W$ seja um subespaço?

11. Seja V um espaço vectorial com subespaços U e W, defina a soma de U e W como o conjunto $U+W=\{u+w:\ u\in U,\ w\in W\}$

    (a) Suponha que $V=\mathbb{R}^3$, U é o eixo x e W é o eixo y . O que é $U+W$?
    (b) Se U e W são subespaços de V, demonstrar que $U+W$ é um subespaço de V .

12. Seja $f(x)=sin^2(x)$ e $g(x)=cos^2(x)$

    (a) Demonstrar que as funções constantes pertencem a $Span\{f,g\}$,
    (b) Demonstrar que a função $cos(2x)$ pertence a $Span\{f,g\}$.

13. Em cada caso, determine se o vetor b está no conjunto gerado pelas colunas da matriz A

    (a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$,
    (b) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$.

14. Mostre que o espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é gerado pelas matrizes

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Seja $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere o conjunto $W=\left\{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} :\ x-y-z=0\right\}$. Mostre que W é subespaço e determine um conjunto gerador de W.

16. Considere $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x-y+z+w=0,\ -x+2y+z+w=0\}$. Mostre que U é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ e determine um conjunto gerador de U.

17. Seja W o subespaço vetorial $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre os elementos de W de uma forma geral.

18. Seja V um espaço vetorial real e S um subconjunto de V que gera V. Seja T um subconjunto de V que contêm S, ou seja, S é um subconjunto de T. Mostre que T gera V.

19. Sejam k e l inteiros positivos com $k \leq l$'. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_l$' vetores em $\mathbb{R}^n$ y $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, $T = \{u_1, u_2, \ldots, u_l\}$. Mostre que $Span(S) \subseteq Span(T)$.

20. Mostre que u, v e w estão no $S = Span\{u, u+v, u+v+w\}$.

21. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_l,\ v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Suponha que cada u_i seja uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Mostre que $Span\{u_1, u_2, \ldots, u_l\} \subseteq Span\{v_1, v_2, ..., v_k)$.

22. Sejam w_1, w_2 e w_3 vetores linearmente independentes. Provar que $v_1 = w_2 - w_3$, $v_2 = w_1 - w_3$ e $v_3 = w_1 - w_2$ são linearmente dependentes.

23. Os vectores $v+w$ e $v-w$ são combinações lineares dos vetores v e w. Escreva v e w como combinações lineares de $v+w$ e $v-w$.

24. Sejam $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$, completar os seguintes enunciados.

    (a) Os quatro vetores são linearmente dependentes pois ...
    (b) Os vetores v_1 e v_2 são linearmente independentes se ...
    (c) Os vetores v_1 e $(0,0,0)$ são linearmente dependentes pois ...

25. Verifique quais dos seguintes subconjuntos são linearmente independente em $\mathbb{R}^3$:

    (a) $\{(1,01),(1,10),(0,1,1),(1,2,3)\}$ (b) $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\}$ (c) $\{(1,2,3),(1,4,9),(1,8,27)\}$

26. Verifique quais dos seguintes subconjuntos são linearmente independente em $\mathbb{R}_4[x]$:

    (a) $\{1,\ x-1,\ x^2+2x+1,\ x^2\}$ (b) $\{x(x-1),\ x,\ 2x^3-x^2\}$

27. Mostre que as seguintes matrizes são linearmente independentes em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e defina o subespaço gerado:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

28. Considere $S = \{f, g\}$, onde $f(x) = x^2$ e $g(x) = x|x|$são funções.

    (a) Mostre que S é linearmente independente em $\mathcal{C}([-1,1])$.
    (b) Mostre que S não é linearmente em $\mathcal{C}([0,1])$, nem $\mathcal{C}([-1,0])$

29. Mostre que os seguintes subconjuntos são linearmente independente em $\mathcal{C}(\mathbb{R})$:

$$S = \{1,\ e^x,\ xe^x\} \qquad e \qquad T = \{1,\ e^x,\ xe^{2x}\}.$$

30. Suponha que o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ seja linearmente independente no espaço vetorial V e seja $v \in V$. Prove que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ é linearmente independente em V se, e somente se, $v \notin Span\ S$.

31. Sejam V um espaço vetorial real e $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$um subconjunto de V. Um vetor $v \in S$ é combinação linear dos outros vetores se e somente se S é linearmente dependente.

32. Mostre que o conjunto $S = \{(1,0,0,-1),(0,1,1,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

33. Encontre uma base para os seguintes espaços.

    (a) V é o espaço das matrizes diagonais de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

    (b) W é o espaço das matrizes triangulais superiores de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

    (c) .$W = \{p(x) \in K_3[x] : \ p(0) + p'(0) - p''(0) = 0\}$

    (d) $V = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \ tr(A) = 0\}$.

    (e) $V = \{A \in M_{3\times 3} : \ a_{11} - 2a_{22} + a_{33} = 0\}$

34. Para cada uma das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ - & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

    (a) Encontre bases para $Lin(A)$, $col(A)$ e $nul(A)$.

    (b) Encontre bases para $Lin(A^T)$ e $col(A^T)$.

35. Calcule a dimensão dos seguintes espaços vetoriais:

    (a) $W = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ A^T = A\}$, (b) $X = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ : \ A^T = -A\}$,

36. Sejam $V = K_2[x]$ o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 e $t \in \mathbb{R}$ fixo. Definimos

$$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = x + t, \qquad f_3(x) = (x+t)^2.$$

    Demonstrar que $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de V. Seja $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$, quais são as coordenadas de g em relação a esta base ordenada $\mathcal{B}$?

37. Sejam T uma transformação linear sobre $\mathbb{C}^2$definida por $T(x,y) = (x+y, x+2y)$, $S^1 = \{(-1,-i),(i,1)\}$ e $S_2 = \{(1+i,-1),(-i,2)\}$:

    (a) Verifique que S_1 e S^2são bases de $\mathbb{C}^2$.

    (b) Qual é a matriz de T relativa a S_2 e S_1?

    (c) Qual é a matriz de T relativa a S_1 e S_2?

38. Determine se T é uma transformação linear

    (a) $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{bmatrix}$,

    (b) $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, $T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+w & 1 \\ 0 & y-z \end{bmatrix}$,

    (c) $T : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$, $T(A) = AB$, onde $B \in M_{n\times n}$ é uma matriz fixa.

    (d) $T : M_{n\times n} \to M_{n\times n}$, $T(A) = AB - BA$, onde $B \in M_{n\times n}$ é uma matriz fixa.

    (e) $T : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $T(A) = tr(A)$. Aqui $Tr(A)$ denota a traça da matriz quadrada e se define por $tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.

    (f) $T : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$, $T(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

    (g) $T : K_2[x] \to K_2[x]$, $T(a + bx + cx^2) = a + 1 + (b+1)x + (c+1)x^2$.

    (h) ,$T : K_2[x] \to K_2[x]$, $T(a + bx + cx^2) = a + b(x+1) + b(x+1)^2$.

    (i) $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $T(f)(x) = f(x^2)$.

(j) $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $T(f)(x) = (f(x))^2$

(k) $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $T(f)(x) = f(c)$, onde $c \in \mathbb{R}$ é um número real fixo.

(l) $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $T(f)(x) = f(c)x^2$, onde $c \in \mathbb{R}$ é um número rela fixo.

39. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear para a qual satisfaz

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Encontre $T\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

40. Seja $T : K_2[x] \to K_1[x]$ uma transformação linear que satisfaz

$$T(1) = 1 + x, \qquad T(x) = 3 - 2x \qquad e \qquad T(x^2) = 4 + 3x$$

Encontre $T(4 - x + 3x^2)$ e $T(a + bx + cx^2)$.

41. Seja $T : K_2[x] \to K_2[x]$ uma transformação linear que satisfaz $T(1 + x) = 1 + x^2$, $T(x + x^2) = x - x^2$ e $T(1 + x^2) = 1 + x + x^2$. Encontre $T(4 - x + 3x^2)$ e $T(a + bx + cx^2)$.

42. Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ uma transformação linear que satisfaz

$$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1, \qquad T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2, \qquad T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 3, \qquad T\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 4.$$

Encontre $T\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

43. Sejam $T : V \to V$ uma transformação linear e $v_1, v_2, ..., v_n$ uma base de V. Demonstrar que se $Tv_i = v_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ então T é a transformação identidade em V .

44. Defina as transformações lineares $S : \mathbb{R}^2 \to M_{2\times 2}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $S\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix}$ e $T\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c+d \\ -d \end{pmatrix}$. Calcule $S \circ T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $S \circ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

45. Defina as transformações lineares $S : K_1[x] \to K_2[x]$ e $T : K_2[x] \to K_1[x]$ por $S(a + bx) = a + (a + b)x + 2bx^2$ e $T(a + bx + cx^2) = b + 2cx$. Calcule $(S \circ T)(3 + 2x - x^2)$ e $(S \circ T)(a + bx + cx^2)$. ¿Se pode calcular $T \circ S$? Fazer-lo.

46. Verifique que S e T são transformações inversas

(a) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,$S(x, y) = (4x + y, 3x + y)$ $\qquad$ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - y, -3x + 4y)$.

(b) $S : K_1[x] \to K_1[x]$, $S(a+bx) = (-4a+b)+2ax$ $\qquad$ $T : K_1[x] \to K_1[x]$, $T(a+bx) = b^2+(a+2b)x$

47. Lembremos que $K_n[x]$ denota o espaço vectorial dos polinômios de grado menor ou igual a n. Definamos $R : K_2[x] \to K_3[x]$ por $R(p(x)) = x^2p'(x)$.

(a) Demonstrar que R é uma transformação linear.

(b) Calcular $Ker(R)$ e $Im(R)$.

(c) Determinar se R é um isomorfismo de espaços vectoriais.

48. Seja $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ definida por $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$. Considere as seguintes matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$:

(a) Quais das matrizes acima estão no $ker(T)$?

(b) Quais das matrizes estão na imagem de T?

(c) Descreva a imagem de T e $ker(T)$.

49. Seja $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $T(A) = tr(A)$. Considere as seguintes matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Quais das matrizes acima estão no $ker(T)$?

(b) Quais dos seguintes escalares estão na imagem de T?

$$0 \qquad 5 \qquad -\sqrt{2}$$

(c) Descreva a imagem de T e $ker(T)$.

50. Seja $T : K_2[x] \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(a + bx + cx^2) = (a - b, b + c)$

(a) Quais dos seguintes vetores estão no rango de T?

$$(0, 0) \qquad (0, 1) \qquad (0, 1).$$

(b) Quais dos seguintes polinômios estão no $ker(T)$?

$$1 + x, \qquad x - x^2, \qquad 1 + x - x^2.$$

(c) Descreva a Imagem de T e o $ker(T)$?

51. Determine se as seguintes transformações lineares são injetiva ou se é sobrejetora.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (2x - y, x + 2y)$.

(b) $T : K_2[x] \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a+b & a+2c \\ 2a+c & b-c \end{bmatrix}$.

(c) $T : K_2[x] \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(a + bx = cx2) = (2a - b, a + b - 3c, c - a)$

(d) $T : K_2[x] \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(p(x)) = (p(0), p(1))$.

(e) d$T : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a-b & b-c \\ a+b & b+c \end{bmatrix}$.

(f) d$T : \mathbb{R}^3 \to W$ definida por $T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a+b+c & b-2c \\ b-2c & a-c \end{bmatrix}$, onde W é o subespaço das matrizes simétricas de tamanho 2×2.

52. Seja $S : K_3[x] \to M_{2\times 2}$ a transformação linear dada por $S(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{bmatrix} a+b & c+2d \\ a+c & d \end{bmatrix}$.

(a) Calcular $Ker(S)$.

(b) Determinar se S é injetiva.

(c) Determinar se S é sobrejetiva.

(d) É S um isomorfismo?

53. Sejam $S : V \to W$ e $T : U \to V$ transformações lineares

(a) Demonstrar que se S e T são injetivas, também o é $S \circ T$.

(b) Demonstrar que se S e T são sobrejetivas, também o é $S \circ T$.