Lista1 - Álgebra linear- T2

Curso de verão 2018 - IME-USP

Professor: Diego Alfonso Sandoval Salazar

Tema: Vetores em $\mathbb{R}^n$ e matrizes

1. Desenhe os seguintes vetores $\mathbb{R}^2$ que representam os pontos

$$(a)\, a = (2,0) \qquad (b)\, b = (2,3) \qquad (c)\, c = (-1,3) \qquad (d)\, d = (1,-2)$$

2. Desenhe os vetores do exercício anterior se as origens estiverem no ponto $(1,-1)$ e defina-los como vetores localizados.

3. Desenhe os seguintes vetores na posição padrão em $\mathbb{R}^3$

$$(a)\, a = (0,0,2) \qquad (b)\, b = (-1,2,3) \qquad (c)\, c = (1,-3,1) \qquad (d)\, d = (-1,-3,-2)$$

4. Se os vetores do exercício anterior forem movidos para que seus pontos finais estejam no ponto $(1,1,1)$, encontre os pontos que correspondem às suas origens os quais definem estes como vetores localizados

5. Considere a figura 1, onde A, B, C, D, E e F são os vértices de um hexágono regular com centro na origem.

   (a) Expresse cada um dos seguintes vetores em termos de $a = \overrightarrow{OA}$ e $b = \overrightarrow{OB}$

$$(i)\, \overrightarrow{AB} \quad (ii)\, \overrightarrow{BC} \quad (iii)\, \overrightarrow{AD} \quad (iv)\, \overrightarrow{CF} \quad (v)\, \overrightarrow{AC} \quad (vi)\, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}.$$

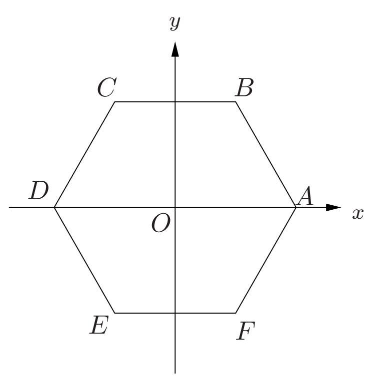

Figure 1: Hexágono regular.

   (b) Mostre que $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{DA}$.

6. Encontre o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $u = (1,2,0,-1)$ e $v = (2,0,-1,3)$.

7. Em cada caso, calcule o produto escalar $u \cdot v$:

   (a) $u = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $u = (2,-3)$, $v = (9,6)$,

   (c) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (d) $u = \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0\right)$, $v = \left(4, -\sqrt{2}, 0, -5\right)$

8. Para cada item no exercício anterior, encontre o comprimento ou norma de u, um vetor unitário na direção de v e a projeção ortogonal de u sobre v.

9. Se u, v e w são vetores $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$, explique por que as seguintes expressões não fazem sentido.

$$(a)\, u \cdot (v \cdot w) \qquad (b)\, u \cdot v + w.$$

10. Em cada caso, determine o ângulo entre os vetores u e v e classifique em agudo, obtuso ou reto.

   (a) $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

   (b) $u = (4, 5, -2)\,,\ v = (1, -1, 1)$

   (c) $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   (d) $u = (1, 2, 3, 4)\,,\ v = (3, 1, -2, 2)$

11. Lembre se que os vetores canônicos de $\mathbb{R}^3$ são $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$. Considere os vetores

$$a)\, i - j + k \qquad b)\, i + k \qquad c)\, j - k$$

   Qual desses vetores é ortogonal ao vetor $v = i + j - k$?

   (a) Somente $a)$
   (b) Somente $b)$
   (c) Somente $c)$
   (d) Somente $b)$ e $c)$
   (e) Todos

12. Considere os pontos em $\mathbb{R}^3$: $A = (1, 1, -1)$, $B = (-3, 2, -2)$ e $C = (2, 2, -4)$. Use vetores para provar que o triângulo $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo.

13. Um cubo tem quatro diagonais internas, mostre que nenhum par delas é perpendicular.

14. Sejam $u,\ v \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$ arbitrários. Demonstrar as seguintes propriedades

   (a) Simetria: $\|u - v\| = \|v - u\|$.
   (b) Desigualdade triangular: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Dicá: Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz
   (c) Linearidade em relação ao produto escalar: $c(u \cdot v) = (cu) \cdot v = u \cdot (cv)$.
   (d) Desigualdade triangular inversa $\|u - v\| \geq \|u\| - \|v\|$.
   (e) Lei do paralelogramo $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$. Interprete o nome da propriedade fazendo um desenho.
   (f) Lei dos cosenos: $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos\theta$. Fazer desenho e interpretar.
   (g) Identidade de polarização: $4u \cdot v = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$.
   (h) $\|u - v\| = \|u + v\|$ se e somente se u e v são ortogonais.
   (i) $u + v$ e $u - v$ são ortogonais se e somente se $\|u\| = \|v\|$.
   (j) $\|u \times v\| = \|u\|\,\|v\|\,|\sin\theta|$, onde θ é o ângulo entre u e v.

15. Decida se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa

   (a) em $\mathbb{R}^3$, se um vetor u for perpendicular a v e a w, então v e w são paralelos.
   (b) em $\mathbb{R}^n$, se u é perpendicular a v e a w, então também é perpendicular a $v + 2w$.
   (c) em $\mathbb{R}^n$, se u e v são perpendiculares então $\|u - v\| = \sqrt{2}$.

16. Encontre dois vetores v, w perpendiculares tais que cada um é perpendicular a $(1, 2, -1)$.

17. Suponha que $\|u\| = 5$ e $\|v\| = 3$, quais são os valores mínimos e máximos de $\|u - v\|$? Quais são os valores mínimo e máximo de $u \cdot v$?

18. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule as matrizes indicadas, se for possível

(a) $A+3D$ (c) $B-C$ (e) AB (g) $DA-AD$
(b) $2D-3A$ (d) $B-C^T$ (f) B^2 (h) $(I_2-A)^2$.

19. De um exemplo de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ diferente de zero tal que $A^2 = 0$.
20. Seja P a matriz
$$P \quad = \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
Verifique que $P = P^2$.
21. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Encontrar uma fórmula para A^n, com $n \geq 1$.
22. Potência de matriz diagonal.
    (a) Mostre que para as matrizes diagonais
    $$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad E = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{bmatrix}$$
    vale $DE = ED = \begin{bmatrix} d_1e_1 & 0 \\ 0 & d_2e_2 \end{bmatrix}$.
    (b) Use isto para provar o resultado acima para matrizes quadradas em geral.
    (c) Mostre, por indução, que
    $$D^n = \begin{bmatrix} d_1^n & 0 \\ 0 & d_2^n \end{bmatrix}$$
    para cada inteiro $n \geq 1$. Estenda o resultado para matrizes $m \times m$, $m \geq 1$.
23. Sejam A, B, C matrizes $n \times n$.
    (a) Mostre que se A tem inversa então $AB = AC$ implica $B = C$.
    (b) Mostre com um exemplo que o item anterior pode ser falso se A não tem inversa. Dica: tome $n = 2$, e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
    (c) Se B tem inversa e A comuta com B (isto e, $AB = BA$) então A também comuta com a inversa de B.
24. Encontre todas as matrizes 2×2 que comutam com qualquer matriz 2×2.
25. Demostrar que $AB = BA$ se, e somente se $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.
26. Uma matriz A quadrada é dita invertível se existe uma matriz quadrada A' do mesmo tamanho tal que $A'A = I = AA'$, onde I denota a matriz identidade. Encontre a inversa da matriz dada (se existe)
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
27. Uma matriz quadrada A é chamada *Nilpotente* se existe um inteiro $r \geq 1$ tal que $A^r = 0$. Sejam A e B matrizes nilpotentes do mesmo tamanho e assuma $AB = BA$. Mostre que AB e $A+B$ são nilpotentes.