Precificação de Contratos Derivativos

May 13, 1998

1 Definições Básicas

Em um contrato de opção de compra (venda) o contratante adquire do contratado o direito de comprar (vender) uma mercadoria do (ao) contratado por um preço de exercício pré-estabelecido, K. Note que o contratante adquire o direito de fazer uma compra (venda), sem ter a obrigação de faze-la (ao contrário de um simples contrato futuro de compra ou venda), daí o nome contrato de opção.

Existem duas modalidades básicas de contrato de opção: em um contrato de tipo Americano o contratante tem o direito de exercer sua opção a qualquer instante t desde a assinatura do contrato até até sua data de vencimento, $0 \leq t \leq h$. No contrato de tipo Europeu a opção pode somente ser exercida na data de vencimento do contrato. Um contrato opção de compra (venda) é tambem denominado um call (put). O preço pelo qual o contratante adquire o call (put) é o preço do contrato, C (P).

A mercadoria especificada no contrato é chamada ativo fundamental ou objeto do contrato. O contratado recebe uma remuneração para absorver os riscos decorrente das variações de preço do ativo fundamental ou objeto, e é por isto denominado especulador. O contratante paga para se proteger contra os mesmos riscos, e é por isto denominado hedger. Contratos de opção são denominados ativos derivativos, pois os ganhos e perdas de ambas as partes resultam (derivam) da evolução do preço do ativo fundamental ou objeto.

O call ou put deve especificar a mercadoria em termos de quantidade, local de entrega (praça) e qualidade. Ambas as partes estabelecem um intermediador idôneo, por exemplo uma bolsa de mercadorias, para dirimir quaisquer duvidas. No exercício de uma opção teriamos então a entrega física da mercadoria na praça especificada com verificação, por parte da bolsa, da quantidade e qualidade.

A mercadoria especificada no contrato é muitas vezes uma mercadoria amplamente comercializada, não importando o fornecedor (uma commoditie), e cujo preço de mercado, $S(t)$, é tambem divulgado pela bolsa. Nestas condições, é geralmente mais cômodo para ambas as partes substituir a entrega física por um acerto de contas em função da diferença entre o preço de exercício e o preço de mercado da comoditie na data do exercício. Por exemplo, num call, o vendedor da opção (contratado ou especulador) simplesmente pagaria ao comprador da opção (contratante ou hedger) o valor $max\{0,(S(t)-K)\}$. No caso de uma put este valor seria $max\{0,(K-S(t))\}$.

Para estudar os contratos de opções iremos modelar a evolução do preço $S(t)$ por um processo estocástico discreto. No modelo de passeio aleatório trinomial temos que o preço poderia assumir apenas três valores: $Pr(S(t+1) = fu(t)*S(t)) = pu(t)$, $Pr(S(t+1) = fd(t)*S(t)) = pd(t)$, $Pr(S(t+1) = S(t)) = 1 - pu(t) - pd(t)$, onde $fu(t)$, $fd(t)$, $pu(t)$ e $pd(t)$ são, respectivamente, os fatores de subida e descida do preço fundamental ou objeto entre os instantes t e $t+1$, e suas probabilidades. No modelo binomial temos $pu(t)+pd(t) = 1$. No modelo geométrico há uma simetria entre os fatores de subida e descida, $fd(t) = 1/fu(t)$. Esta hipótese de simetria, que é motivada por certas considerações econômicas e empíricas, em muito facilita a representação do espaço de estados. No modelo estacionário os fatores e suas probabilidades são constantes no tempo. Assim no modelo binomial geométrico temos apenas os parâmetros $fu(t)$ e $pu(t)$. Mesmo num modelo tão simples podemos retratar um processo onde a taxa de retorno $r(t) = ln(S(t+1)/S(t))$ tem valor esperado e desvio padrão (tendência e volatilidade)

$$\mu(t) = pu(t)*fu(t) + (1-pu(t))/fu(t) \ \text{ e}$$

$$\sigma(t) = \sqrt{pu(t)*(1-pu(t))*(fu(t)-1/fu(t))^2}$$