

SULLA POSSIBILITÀ DI VALORI ECCEZIONALI PER UNA
LEGGE DI INCREMENTI ALEATORI.

In: « *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei* », 1929, vol. X, fasc. 7-8, pp. 325-329.

Calcolo delle probabilità. — *Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori.* Nota ⁽¹⁾ di B. DE FINETTI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Intendiamo per *valori eccezionali* di una legge di probabilità i punti in cui la funzione di ripartizione è discontinua; se X è un'ordinaria variabile casuale, ξ è un valore eccezionale della sua legge di probabilità se l'ipotesi che X sia compresa fra $\xi - \varepsilon$ e $\xi + \varepsilon$ ha una probabilità che non tende a zero quando si fa tendere a zero ε . Rappresentando al solito la legge di probabilità con una distribuzione di masse, di somma = 1, sull'asse ξ , in modo che la massa compresa in un generico intervallo misuri la probabilità che la variabile casuale X vi appartenga, possiamo dire che i valori eccezionali sono i punti in cui è concentrata una massa finita. È noto che tali punti possono essere al più un'infinità numerabile.

Ci proponiamo di dimostrare che se X è una grandezza soggetta durante il tempo a variare con continuità per cause almeno in parte accidentali (che supporremo però invariabili), non può aversi per nessun istante λ un valore eccezionale per la legge di probabilità della variabile casuale $X(\lambda)$.

Secondo la definizione che ne ho recentemente data ⁽²⁾, la $X(\lambda)$ è cioè una funzione continua a incremento aleatorio a legge fissa: ciò significa — per richiamare il concetto nella forma forse più facile — che gli incrementi di X in n intervalli uguali successivi sono variabili casuali indipendenti soggette a una medesima legge, e quindi (supposto $X(0) = 0$), la legge di probabilità $\Phi_\lambda(\xi)$ di $X(\lambda)$ si ottiene componendo n volte $\Phi_{\frac{\lambda}{n}}(\xi)$,

legge di probabilità di $X\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. E, più in generale, risulta che componendo $\Phi_{\lambda_1}(\xi)$ e $\Phi_{\lambda_2}(\xi)$ si ottiene $\Phi_{\lambda_1 + \lambda_2}(\xi)$, perchè l'incremento $X(\lambda_1 + \lambda_2) - X(0) = X(\lambda_1 + \lambda_2)$ ottenuto nell'intervallo $(0, \lambda_1 + \lambda_2)$ si può considerare come somma degli incrementi ottenuti in due intervalli di lunghezza λ_1 e λ_2 .

Ciò che ci proponiamo di dimostrare è allora: che se $X(\lambda)$ è una funzione a incremento aleatorio a legge fissa, capace di variare soltanto con continuità, la funzione di ripartizione $\Phi_\lambda(\xi)$ non può essere funzione discontinua di ξ per nessun valore del parametro λ .

(1) Pervenuta all'Accademia il 7 ottobre 1929.

(2) V. *Sulle funzioni a incremento aleatorio*, «Rend. Acc. dei Lincei», 1929, 2^o sem.

Un tale risultato appare intuitivamente assai verosimile, se si pensa che $X(\lambda)$ si può scomporre nella somma di un numero grande *quanto si vuole* di incrementi, indipendenti tra loro, ottenuti in altrettanti intervalli piccolissimi di tempo, e che hanno essi pure un ordine di grandezza probabile estremamente piccolo. E sembrerebbe strano che un insieme così complesso di cause avesse per effetto di favorire in modo eccezionale dei valori particolari ben determinati.

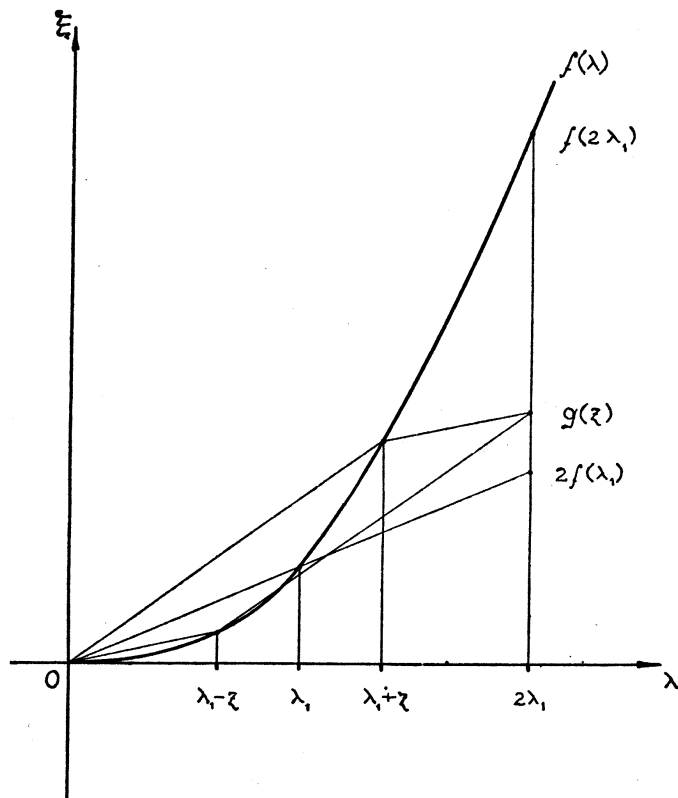
Un facile lemma ci permette di ricondurre il caso più generale di una legge mista (masse in parte concentrate e in parte diffuse) a quello più semplice in cui si hanno soltanto masse concentrate. Siano X e Y due variabili casuali indipendenti, e consideriamo la loro somma $Z = X + Y$: è ovvio che se ξ ed η sono valori eccezionali rispettivamente per X e Y con probabilità (massa concentrata) p, q , $\zeta = \xi + \eta$ è un valore eccezionale per Z con probabilità almeno uguale a pq ; inversamente, se ζ è un valore eccezionale per Z , esiste almeno una coppia di numeri ξ_i, η_i tali che $\xi_i + \eta_i = \zeta$, ξ_i è valore eccezionale per X , η_i è valore eccezionale per Y , e si ha inoltre che la probabilità di ζ è $\sum_i p_i q_i$, ove con p_i, q_i si indichino rispettivamente le probabilità di ξ_i ed η_i . Le masse concentrate relative alla legge di $X + Y$ provengono cioè unicamente, e nel modo specificato, dalle masse concentrate relative alle leggi di X e di Y .

Ciò basta a provare che se $\Phi_\lambda(\xi)$ rappresenta una legge fissa d'incremento aleatorio che ammette valori eccezionali (per uno almeno, e quindi, per quanto sopra, per tutti i valori di λ), e con $\bar{\Phi}_\lambda(\xi)$ indichiamo la legge che se ne ricava considerando soltanto le masse concentrate (divise per $e^{-p\lambda}$, ove $-p$ è il logaritmo della somma delle masse concentrate relative alla legge $\Phi_\lambda(\xi)$, in modo da renderne la somma $= 1$), $\bar{\Phi}_\lambda(\xi)$ è una legge fissa di incremento aleatorio, e, per qualunque λ , non esistono che masse concentrate. Anzi, subordinatamente all'ipotesi che in un dato istante λ_1 la X cada in uno dei valori eccezionali, la variabile a incremento aleatorio X segue la legge $\bar{\Phi}_\lambda(\xi)$ in tutto l'intervallo $\lambda \leq \lambda_1$.

Una variabile a incremento aleatorio con masse tutte concentrate non può (o può con probabilità nulla) assumere in ogni istante λ altri valori che i corrispondenti valori eccezionali dei quali considereremo l'aggregato sul piano (λ, ξ) ; se d'altronde X non può variare se non con continuità, è necessario che ogni punto eccezionale (λ_1, ξ_1) sia collegato all'origine $(0, 0)$ ⁽¹⁾ mediante almeno una linea continua ($\xi = f(\lambda)$, f continua) di punti eccezionali. Dimostriamo che tale linea non può essere che una retta. Per la proprietà sopra ricordata, l'aggregato dei punti eccezionali gode evidentemente della proprietà che se vi appartengono (λ_1, ξ_1) e (λ_2, ξ_2) vi appartiene necessariamente anche $(\lambda_1 + \lambda_2, \xi_1 + \xi_2)$, punto ottenuto, come mostra la figura, colla regola del parallelogrammo. Supposto che $f(\lambda)$

(1) Assumendo al solito $X(0) = 0$.

non sia lineare, potremo fissare λ_1 tale che $f(2\lambda_1) \neq 2f(\lambda_1)$. Qualunque sia z ($0 \leq z \leq \lambda_1$) è chiaro che $g(z) = f(\lambda_1 - z) + f(\lambda_1 + z)$ è valore eccezionale per $\lambda = 2\lambda_1$, dato che i due addendi sono per ipotesi valori eccezionali per $\lambda = \lambda_1 - z$ e $\lambda = \lambda_1 + z$, e che si ha $(\lambda_1 - z) + (\lambda_1 + z) = 2\lambda_1$. Ma $g(z)$ è funzione continua di z , $g(0) = 2f(\lambda_1) \neq f(2\lambda_1) = g(\lambda_1)$, e quindi al variare di z si ottengono certamente tutti i valori compresi fra $2f(\lambda_1)$ e $f(2\lambda_1)$, che dovrebbero tutti essere valori eccezionali per $\lambda = 2\lambda_1$. Ciò è assurdo, non potendo i valori eccezionali essere che al più numerabili.



Ciò prova che l'aggregato dei punti eccezionali è costituito di rette uscenti dall'origine; allo stesso modo si vede subito che di tali rette non ve ne può essere più d'una, altrimenti sarebbero punti eccezionali anche tutti quelli compresi fra due rette distinte.

Il caso in cui esista una retta di punti eccezionali è effettivamente realizzabile. Basti pensare a una variabile X che in un intervallo di tempo λ ha (con certezza assoluta o con certezza pratica: probabilità = 1) un incremento uguale a $k\lambda$. Allora $\Phi_\lambda(\xi) = 0$ od 1 a seconda che $\xi < k\lambda$ o $\xi > k\lambda$; $\psi_\lambda(t) = e^{ik\lambda t}$. Dimostriamo che l'unico caso in cui valori eccezionali sono possibili, compatibilmente colla condizione di continuità, è quello ora considerato di una funzione certamente lineare, per il quale del resto l'introduzione dei concetti di probabilità è quasi pleonastica.

Supponiamo infatti che esista una retta $\xi = k\lambda$ di punti eccezionali; se $-p$ è il logaritmo della massa concentrata nel punto $\xi = k$ per $\lambda = 1$, $e^{-p\lambda}$

è la probabilità che sia $X(\lambda) = k\lambda$ (vedi sopra). Sia λ un istante determinato, fissiamo comunque ε , e supponiamo sia q la probabilità che $X(\lambda) > k\lambda + \varepsilon$. Ciò implica, per la continuità, che esista almeno un istante λ' ($0 < \lambda' < \lambda$) tale che $X(\lambda') = k\lambda' + \varepsilon$, ma se è $X(\lambda') = k\lambda' + \varepsilon$ si ha una probabilità $e^{-p(\lambda-\lambda')} > e^{-p\lambda}$ che, l'ulteriore incremento da λ' a λ avvenendo secondo il valore eccezionale, risulti $X(\lambda) - X(\lambda') = k(\lambda - \lambda')$, e quindi $X(\lambda) = k\lambda + \varepsilon$.

Si concluderebbe che il valore $k\lambda + \varepsilon$ ha probabilità $> qe^{-p\lambda} > 0$, contro il teorema precedente che esclude la possibilità di altri valori eccezionali. Dev'essere dunque $q = 0$: dev'essere cioè nulla la probabilità che si abbia $X(\lambda) > k\lambda + \varepsilon$, e analogamente dev'essere nulla la probabilità che si abbia $X(\lambda) < k\lambda - \varepsilon$. Ciò comunque piccolo si fissi ε , e quindi $\Phi_\lambda(\xi) = 0$ od 1 a seconda che $\xi < k\lambda$ o $\xi > k\lambda$; siamo dunque nel caso precedentemente considerato di una variabile certamente lineare.

*
**

L'ipotesi che la X sia capace di variare soltanto con continuità è essenziale per le precedenti dimostrazioni. È facile infatti immaginare, per il caso di variabili discontinue, delle leggi particolarmente interessanti di incrementi aleatori con infiniti valori eccezionali, oppure aventi un unico valore eccezionale ma con probabilità minore di uno⁽¹⁾.

Basta pensare ad esempio che il numero dei nati, o dei morti, in un dato intervallo di tempo, dei *goals* segnati da una data squadra nel corso di una partita di calcio, e in genere il numero $X(\lambda)$ delle ripetizioni, fino all'istante λ , di un dato fenomeno, che può verificarsi con una data probabilità ad ogni istante, è una funzione a incremento aleatorio capace di variare assumendo soltanto valori interi, e aumentando di uno ad ogni punto di discontinuità. Tutti i valori interi (≥ 0) sono quindi valori eccezionali della sua legge di probabilità, per qualunque istante λ . Se supponiamo la legge fissa, è costante il numero (positivo) p tale che $p d\lambda$ è la probabilità che $X(\lambda)$ sia discontinua in un intervallo $d\lambda$, e la probabilità $p_n(\lambda)$ che sia $X(\lambda) = n$ risulta

$$p_n(\lambda) = \frac{p^n \lambda^n}{n!} e^{-p\lambda}.$$

(1) Si vede facilmente che se $\Phi_\lambda(\xi)$ ha più di un valore eccezionale ne ha infiniti e non racchiudibili in un intervallo finito. Infatti anche $\frac{\Phi_\lambda(\xi)}{n}$ ne ha allora almeno due, e quindi $\Phi_\lambda(\xi)$ ne ha almeno $n + 1$ (qualunque sia n) e dunque infiniti; se poi fossero racchiudibili in un intervallo finito, lo scostamento quadratico medio dei valori eccezionali di $\Phi_\lambda(\xi)$ al variare di λ , tenderebbe a zero almeno come λ , anziché come $\sqrt{\lambda}$, quando $\lambda \rightarrow 0$.

È data cioè dalla formula di POISSON nota sotto il nome di *legge degli eventi rari*.

Un caso molto più generale e interessante si ha analogamente supponendo che la X sia suscettibile soltanto di variazioni brusche, istantanee, la cui ampiezza sia però a sua volta aleatoria. Consideriamo ad esempio, durante una pioggia di cui supponiamo costante l'intensità, la massa dell'acqua caduta in un pluviometro. Essa aumenta con discontinuità (una goccia per volta), e, se le gocce avessero tutte la stessa massa, basterebbe contare il loro numero, e si ricadrebbe nel caso trattato precedentemente. Tenuto conto che la massa di ogni goccia sarà accidentalmente diversa dalle altre, la massa dell'acqua del pluviometro cresce invece secondo una legge più complicata, che si può però determinare completamente quando sia nota la probabilità che la massa di una singola goccia sia compresa fra dati valori. Molte altre variabili fisiche e statistiche fornirebbero esempi perfettamente analoghi. Così, se oltre al numero delle morti in un dato periodo di tempo (caso che già abbiamo considerato) interessa studiare l'ammontare totale delle eredità lasciate, abbiamo un esempio dell'identico tipo (1).

Matematicamente. Sia X una variabile suscettibile di sole variazioni discontinue, sia $p d\lambda$ la probabilità che in un intervallo $d\lambda$ essa abbia un istante di discontinuità, sia $\Phi(\xi)$ la legge di probabilità del salto che in un tale punto essa deve fare, e $\psi(t) = \int e^{it} d\Phi(\xi)$ la corrispondente funzione caratteristica. Si trova — e per lo scopo che qui interessa basta accennarlo — che $\psi_\lambda(t)$, funzione caratteristica di $X(\lambda)$, è

$$\psi_\lambda(t) = e^{p\lambda[\psi(t) - 1]}$$

e i valori eccezionali per $X(\lambda)$ sono tutti e soli quelli esprimibili mediante una somma di valori eccezionali della $\Phi(\xi)$, uguali o distinti, in numero finito. Ciò che era del resto una conseguenza intuitiva dei soliti lemmi e dell'interpretazione esplicita.

In particolare, se $\Phi(\xi)$ è continua, l'unico valore eccezionale della legge di $X(\lambda)$ è lo zero. Si ha cioè una certa probabilità che *nessun* incremento sia avvenuto in tutto l'intervallo $(0, \lambda)$. Scegliendo opportunamente $\Phi(\xi)$ si possono costruire infiniti esempi di casi svariati, più o meno interessanti.

(1) Un esempio assai più interessante è dato dalla teoria cinetica dei gas: la velocità $X(\lambda)$ di una data molecola all'istante λ è infatti una funzione a incremento aleatorio capace soltanto di variazioni discontinue (un incremento finito ad ogni urto). La probabilità di un urto in un dato intervallo $(\lambda, \lambda + d\lambda)$, e i suoi effetti, dipendono però dalla velocità nell'istante λ ; la $X(\lambda)$ è quindi una *funzione a incremento aleatorio a legge differenziale* (loc. cit.) e non rientra nel caso che ora ci interessa.

Per la via indicata si potrebbe tentare una nuova dimostrazione della legge di MAXWELL.

