# SPAZI ASTRATTI METRICI ($D_M$).

In: « *Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei* », Roma 1930, pp. 248-256.

BRUNO DE FINETTI

# Spazi astratti metrici ($\mathcal{D}_M$)

Estratto dagli *Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei*
Anno LXXXIII — Sessione VI del 18 Maggio 1930

ROMA
SCUOLA TIPOGRAFICA PIO X
Via degli Etruschi, 7-9

1930

# Spazi astratti metrici ($\mathcal{D}_M$).

Nota del dott. **BRUNO de FINETTI**, presentata dal S. O. G. GIORGI (1).

**Sommario.** — Si considerano e si caratterizzano quegli spazi vettoriali distanziali in cui la definizione della distanza può farsi dipendere da quella di « prodotto interno di due vettori ». Si mostra l'interesse di considerarli a parte, specie per la possibilità di studiarli applicando il calcolo vettoriale, e si propone per essi la denominazione di « spazi metrici ».

## I.

Fra gli spazi ($\mathcal{D}$) vettoriali (secondo la terminologia di FRÉCHET, EA, p. 140 (2)), ve n'è una categoria importante per le notevoli e semplici proprietà di cui gode, e che propongo di chiamare *spazi metrici* ($\mathcal{D}_M$). Rientrano fra gli spazi metrici parecchi degli spazi praticamente importanti considerati già da diversi Autori, come, oltre al caso banale degli spazi euclidei a un numero finito di dimensioni, gli spazi ($\Omega$) ed ($\Omega_1$) di HILBERT. E cioè: l'insieme ($\Omega$) dei *punti* $x$ definiti da una successione di coordinate $(x_1\, x_2 \dots x_n \dots)$ soggette alla restrizione che $\Sigma_i x_i^2$ sia convergente, e in cui la *distanza* $(X, Y)$ di due punti X e Y è data da $(X, Y)^2 = \Sigma_i (x_i - y_i)^2$; l'insieme ($\Omega_1$) dei *punti* $f$ costituiti dalle funzioni $f(x)$ definite su un intervallo J fissato una volta per tutte e tali che in J abbiano quadrato sommabile (integrabile secondo LEBESGUE), e in cui la *distanza* $(f, g)$ di due punti (funzioni) $f$ e $g$ è data da

$$(f, g)^2 = \int_J [f(x) - g(x)]^2\, dx .$$

Le proprietà notevoli degli spazi metrici cui sopra alludevo non hanno solamente carattere *locale*, non rimangono cioè invariate cambiando una particolare definizione della distanza in altra *equivalente* dal punto di vista topo-

(1) Nella seduta del 18 maggio 1930.

(2) Colle iniziali EA indicheremo l'opera *Les Espaces Abstraits, etc.*, Paris, 1928.

logico (EA, p. 64) (in modo cioè da non modificare la convergenza delle successioni di punti né i loro limiti rispettivi). Daremo quindi una definizione non topologica assegnando una proprietà non puramente locale della distanza, o, in altre parole, imponendo all'espressione della distanza una *forma* particolare. Si potranno studiare in seguito le condizioni perchè uno spazio vettoriale non metrico possa rendersi tale cambiando la definizione originaria della distanza in altra equivalente (considerando cioè il concetto *topologico* di « spazio che si può rendere metrico »).

Negli spazi metrici valgono le proprietà note della geometria euclidea, come già il Fréchet aveva osservato fin dal 1908 a proposito dello spazio ($\Omega$) (*Essai de Géométrie analytique à une infinité de coordonnées* [1], « Nuov. Ann. de Math. », t. VIII, 1908, in due parti); intendo qui dimostrarlo in generale per uno spazio metrico qualunque facendo uso del calcolo vettoriale [2], il solo mezzo che permette di prescindere dalle coordinate o dal particolare significato dei punti di un dato campo o da altri elementi parassiti, e di basarsi direttamente sulle proprietà stesse che *definiscono* gli spazi metrici.

## II.

Tutte le proprietà metriche della geometria elementare provengono dal fatto che la distanza di due punti P e Q, ossia il modulo del vettore $\boldsymbol{u} = \mathrm{P} - \mathrm{Q}$, si può definire coll'intermediario del *prodotto interno*, e cioè di un'operazione $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ che dà un numero funzione lineare simmetrica di due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, e tale che $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}$, per ogni $\boldsymbol{u}$ non nullo, risulta positivo; si pone allora

$$\mathrm{mod}\ \boldsymbol{u} = \sqrt{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}}\,.$$

Le condizioni cui l'operazione $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ deve soddisfare sono, in formule:

$$\boldsymbol{u} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}\,,$$
$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}\,, \qquad \boldsymbol{u} \times m\boldsymbol{v} = m(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}),$$
$$\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} > 0 \qquad (\boldsymbol{u} \neq 0)\,.$$

È facile verificare che il numero

$$\mathrm{mod}\ \boldsymbol{u} = \sqrt{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}}$$

(1) Non ho avuto occasione di vedere questo lavoro, ma il cenno in EA, p. 142, ed il titolo ne fanno chiaramente comprendere il contenuto.

(2) Mi atterrò alle notazioni italiane (Burali-Forti e Marcolongo).

soddisfa allora le tre condizioni poste dal Fréchet perchè possa assumersi mod $(P-Q)$ come *distanza* dei due punti P e Q:

1) Per ogni coppia di punti P e Q è

$$\text{mod}\,(P-Q)=\text{mod}\,(Q-P)\geq 0$$

(infatti $$(-\boldsymbol{u})\times(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u})\;.$$

2) È mod $(P-Q)=0$ se e soltanto se $P-Q=0$ ossia $P=Q$.

3) Per ogni terna di punti P, Q, O è sempre

$$\text{mod}\,(P-Q)\leq\text{mod}\,(P-O)+\text{mod}\,(Q-O)\,.$$

È infatti

$$\text{mod}\,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\leq\text{mod}\,\boldsymbol{u}+\text{mod}\,\boldsymbol{v}$$

ossia

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2\leq(\text{mod}\,\boldsymbol{u}+\text{mod}\,\boldsymbol{v})^2=\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{v}^2+2\,\text{mod}\,\boldsymbol{u}\,.\,\text{mod}\,\boldsymbol{v}$$

perchè

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2=\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{v}^2+2\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$$

ed è

$$|\,\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\,|\leq\text{mod}\,\boldsymbol{u}\cdot\text{mod}\,\boldsymbol{v}$$

ossia

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})^2\leq\boldsymbol{u}^2\cdot\boldsymbol{v}^2\,.$$

Ciò risulta facilmente osservando che

$$\boldsymbol{u}^2+2m\,\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+m^2\,\boldsymbol{v}^2=(\boldsymbol{u}+m\,\boldsymbol{v})^2\geq 0$$

ed il discriminante dell'espressione quadratica in $m$ dev'essere quindi positivo (o al più nullo).

Cerchiamo inversamente, definita la distanza, ossia il *modulo* dei vettori, se e sotto quali condizioni si può definire corrispondentemente il loro prodotto interno e se ciò si può fare in un unico o in più modi diversi.

Dalla

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2=\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{v}^2+2\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$$

si ricava

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2-\boldsymbol{u}^2-\boldsymbol{v}^2]\;,$$

formula che esprime il prodotto interno mediante la sola nozione di *modulo* di un vettore. Esiste quindi al più una sola nozione di prodotto interno compatibile con una data definizione della distanza, ed è quella espressa nel modo sopraindicato; bisogna però assicurarsi sotto quali condizioni essa gode delle proprietà necessarie per poterla considerare come prodotto interno.

L'espressione trovata è essa stessa simmetrica in $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, e anche la condizione che il quadrato del modulo sia positivo è soddisfatta identicamente (1) in quanto risulta $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^2$. Resta a esprimere la linearità: la condizione

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w})$$

dà, uguagliando i due termini espressi mediante i moduli,

$$\boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{v}^2 + \boldsymbol{w}^2 + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})^2 = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})^2 + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})^2 + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})^2. \quad [M]$$

Tale condizione significa che: *in un parallelepipedo di cui* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ *sono tre spigoli concorrenti in un vertice* O, *la somma dei quadrati delle lunghezze di questi tre spigoli più il quadrato della lunghezza della diagonale del parallelepipedo uscente da* O, *uguaglia la somma dei quadrati delle lunghezze delle diagonali uscenti da* O *delle tre faccie del parallelepipedo passanti per* O.

La condizione

$$\boldsymbol{u} \times m\,\boldsymbol{v} = m(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$$

è conseguenza della

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$$

se $m$ è razionale; se $m$ è irrazionale scende poi dalla proprietà già utilizzata

$$|\,\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\,| \leq \text{mod}\ \boldsymbol{u} \cdot \text{mod}\ \boldsymbol{v}.$$

Si ha infatti

$$|\,\boldsymbol{u} \times m\boldsymbol{v}\,| \leq \text{mod}\ \boldsymbol{u} \cdot \text{mod}\,(m\boldsymbol{v}) = m \cdot \text{mod}\,\boldsymbol{u} \cdot \text{mod}\ \boldsymbol{v}\ ;$$

se $h$ è tale che $m - h$ sia razionale è allora

$$\boldsymbol{u} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (m - h)\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times h\boldsymbol{v} = (m - h)(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{u} \times h\boldsymbol{v}$$

$$|\,(\boldsymbol{u} \times m\boldsymbol{v}) - (m - h)(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})\,| \leq h \cdot \text{mod}\,\boldsymbol{u} \cdot \text{mod}\,\boldsymbol{v}$$

da cui, potendosi $h$ prendere piccolo a piacere, risulta

$$\boldsymbol{u} \times m\boldsymbol{v} = m(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \qquad c.\ v.\ d.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè uno spazio $(\mathcal{D})$ vettoriale sia uno spazio metrico è quindi che esso soddisfi la condizione [M]; un tale spazio indicheremo $(\mathcal{D}_M)$.

(1) Si noti che la proprietà $\text{mod}\,(m\boldsymbol{v}) = m \cdot \text{mod}\ \boldsymbol{v}$ $(m \geq 0)$ è già presupposta nella definizione di spazio $(\mathcal{D})$ vettoriale del Fréchet.

## III.

È inutile riscrivere qui tutti i teoremi dell'ordinaria geometria analitica a $n$ dimensioni che dipendono, scritti vettorialmente, dalle proprietà elementari del prodotto interno, e valgono quindi necessariamente in ogni spazio ($\mathcal{D}_M$). Possiamo riassumere in due parole tutte queste proprietà dicendo che *in ogni iperpiano a un numero finito di dimensioni immerso in uno spazio metrico vale l'ordinaria geometria euclidea.*

Varrà la pena piuttosto di vedere se e quali proprietà nuove e caratteristiche implica il passaggio da un numero finito a un numero infinito di dimensioni. Ma dobbiamo per ciò dare qualche definizione che ci occorrerà.

Diremo *varietà euclidea* o *euclideo* ogni insieme di punti che contiene interamente ogni retta con cui abbia in comune più d'un punto. Un insieme di punti P è un euclideo se e solo se, essendo O un suo punto, la classe dei vettori P — O costituisce un sistema lineare (proprietà questa che se è vera per *almeno un* O è vera per *qualunque* punto O).

L'intersezione di due euclidei o di una classe anche infinita di euclidei è un euclideo; dato un insieme qualunque di punti $u$ possiamo quindi definire l'euclideo determinato da $u$ come l'intersezione di tutti gli euclidei che contengono $u$: esso è il minimo euclideo che contiene $u$. Si dimostra facilmente che se un punto P appartiene all'euclideo determinato da $u$ esiste nn insieme *finito* di punti $P_1 P_2 \ldots P_n$ di $u$ tale che P appartiene all'euclideo determinato da $P_1 P_2 \ldots P_n$. È ovvio poi che l'euclideo determinato da un insieme $v$ contenuto in $u$ è contenuto (senza escludere che possa coincidere) nell'euclideo determinato da $u$.

Ho dimostrato altrove [1] che si può definire il *numero delle dimensioni* di un euclideo $u$ come il numero cardinale (diminuito di 1) di un qualunque *sistema fondamentale* dell'euclideo $u$, dicendo sistema fondamentale di $u$ un

[1] *Sul concetto di* numero delle dimensioni *di un sistema lineare*, « Atti Pont. Acc Sc. Nuovi Lincei », 1930. È ivi definito il numero delle dimensioni di un sistema lineare come il numero cardinale di un suo sistema fondamentale. Se si vuole definire il numero delle dimensioni di un euclideo $u$ come quello del sistema lineare dei settori P — O ove O è un punto fisso e P un punto generico di $u$, il numero cardinale va diminuito di 1, ciò che ha valore del resto soltanto quando esso è finito. E infatti, se $P_0 P_1 \ldots P_n$ è un sistema fondamentale di $u$ (costituito di $n+1$ punti), $P_1 - P_0 \ldots P_n - P_0$ è un sistema fondamentale del corrispondente sistema lineare di vettori (costituito da $n$ vettori).

insieme di punti $v$ tale che esso determini l'euclideo $u$ ma che nessun insieme contenuto in $v$ determini l'euclideo $u$. Basta per ciò ovviamente che un singolo punto di $v$ non appartenga mai all'euclideo determinato da tutti i rimanenti. Un punto di un euclideo $u$ si può esprimere in uno e un sol modo come combinazione lineare di punti di un suo sistema fondamentale $v$ (in numero finito).

Facili esempi: gli euclidei a $n$ dimensioni, con $n$ finito, sono spazi euclidei (o *iperpiani*, secondo la locuzione già usata) a $n$ dimensioni, perchè i loro sistemi fondamantali sono i gruppi di $n+1$ loro punti indipendenti (non appartenenti a un euclideo a $n-1$ dimensioni). Così gli euclidei a $1, 2, 3$ dimensioni sono le rette, i piani, gli insiemi simili allo spazio ordinario a 3 dimensioni. Conviene poi considerare i punti come euclidei a zero dimensioni.

Per uno «spazio vettoriale», lo spazio totale è un euclideo, e avrà quindi un certo numero di dimensioni. Se ha un numero infinito di dimensioni, contiene sempre degli euclidei a $n$ dimensioni, con $n$ finito comunque grande, ed anche degli euclidei a dimensione numerabile

## IV.

Queste proprietà sono indipendenti dalle nozioni *metriche*; dimostriamo ora, ritornando ad esse, che in uno spazio metrico a infinite dimensioni, contrariamente a quanto si ha quando il numero delle dimensioni è finito, *esistono sempre degli euclidei che non sono insiemi perfetti* (che non coincidono col loro derivato) [1]. È questa una proprietà tipica che può considerarsi come esempio delle circostanze nuove che si presentano passando al caso di un numero infinito di dimensioni.

Cominciamo coll'osservare che uno spazio $(\mathfrak{D})$ è a fortiori uno spazio $(\mathfrak{L})$ (EA, p. 163 e sgg.), ossia che se P è punto d'accumulazione dell'insieme $u$ esiste una successione di punti $P_1\, P_2 \dots P_n$ di $u$ convergente verso P, tale cioè che la distanza di $P_n$ da P tenda a zero col crescere di $n$. Ciò mostra che P è punto d'accumulazione di $u$ se e soltanto se esiste un euclideo a dimensione al più numerabile tale che P è punto d'accumulazione dei punti di $u$ appartenenti a quell'euclideo. In particolare: se $u$ è un euclideo a infinite

[1] E cioè che non sono *chiusi*; è ovvio che sono sempre *densi in sè*.

dimensioni, ogni suo punto d'accumulazione è punto d'accumulazione di almeno un euclideo a dimensione numerabile contenuto in $u$. Perchè esista nello spazio U un euclideo che non è insieme perfetto, è necessario dunque che esista in U un euclideo a dimensione numerabile che non è insieme perfetto [1].

È facile ora vedere che ogni euclideo a dimensione numerabile, e quindi, a fortiori, ogni euclideo a infinite dimensioni, contiene infiniti euclidei a dimensione numerabile che non sono insiemi perfetti. Sia infatti $P\,P_1\,P_2 \dots P_n \dots$ una successione di punti indipendenti e diciamo $u$ l'euclideo che essi determinano. Il punto P non appartiene all'euclideo $v$ determinato da $P_1\,P_2 \dots P_n \dots$, ma appartiene al suo derivato se i moduli dei vettori $(P_n - P)$ hanno limite inferiore nullo. In generale, detta $c_1\,c_2 \dots c_n \dots$ una successione di numeri reali non nulli, l'euclideo $u$ determinato dai punti $Q_1\,Q_2 \dots Q_n \dots$ tali che $Q_n - P = c_n(P_n - P)$ non contiene P, ma ha P come punto d'accumulazione ogni qualvolta la successione $| c_n \operatorname{mod}(P_n - P) |$ ha limite inferiore nullo (ed anzi anche sotto condizioni meno restrittive): di tali euclidei ne esistono dunque ovviamente infiniti. È ovvio che, se $v$ è un tale euclideo, non solo il punto P ma ogni altro punto di $u$ è punto d'accumulazione di $v$, e quindi l'euclideo $u$ appartiene al derivato dell'euclideo $v$, mentre l'euclideo $v$ è contenuto (propriamente) in $u$.

È facile infatti dimostrare, più in generale, che il derivato di un euclideo è un euclideo. Se A e B sono punti d'accumulazione dell'euclideo $u$, un punto generico $C = A + \lambda(B - A)$ della retta determinata da A e B è punto d'accumulazione per $u$; siano infatti $A_1\,A_2 \dots A_n \dots$ e $B_1\,B_2 \dots B_n \dots$ due successioni di punti di $u$ che convergono rispettivamente verso A e verso B: i punti $C_1\,C_2 \dots C_n \dots$ ove $C_h = A_h + \lambda(B_h - A_h)$ appartengono ad $u$ (perchè è un euclideo) e convergono verso C perchè

$$C - C_n = (1 - \lambda)(A - A_n) + \lambda(B - B_n)$$

e allora

$$\operatorname{mod}(C - C_n) \leq (1 - \lambda)\operatorname{mod}(A - A_n) + \lambda \operatorname{mod}(B - B_n)$$

tende necessariamente a zero.

[1] Benchè la conclusione cui si arriverà immediatamente renda inutili queste considerazioni, mi sembra valga la pena di svilupparle perchè per sé stesse abbastanza interessanti.

## V.

Si presenterebbero molte interessanti questioni sull'argomento. Si potrebbe anzitutto esprimere e dimostrare in forma intrinseca le proprietà note degli spazi metrici particolari già considerati, e vedere se sussistono per ogni spazio metrico, o, in caso negativo, a quali altre restrizioni sono subordinate. Si potrebbe cercare poi se due spazi metrici a ugual numero di dimensioni hanno lo stesso tipo di dimensione (nel senso di Fréchet, EA, p. 29), come appare probabile (mentre la reciproca è ovvia). Si potrebbe infine sviluppare il calcolo vettoriale-omografico degli spazi metrici più generali, che presenta, nel caso di infinite dimensioni, delle novità interessanti (1).

(1) Che mettono ancor maggiormente in luce la superiorità dell'elegante algoritmo vettoriale in confronto dei metodi che ricorrono agli ingombranti parassiti delle coordinate.