A PROPOSITO DELL'ESTENSIONE DEL TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI ALLE CLASSI NUMERABILI.

(In risposta alla prima nota del Prof. Fréchet: *Sur l'extension du théorème des probabilités totales au cas d'une suite infinie d'évènements*).

In: « *Rendiconti del R. Istituto di Scienze e Lettere* », 1930, vol. LXIII, fasc. 11-14, pp. 1-5.

SUR L'EXTENSION DU THÉORÈME DES PROBABILITÉS TOTALES AU CAS D'UNE SUITE INFINIE D'ÉVÉNEMENTS.

Nota del prof. MAURICE FRÉCHET

(Adunanza del 3 luglio 1930)

Sunto. — L'auteur montre par des exemples que l'extension du théorème des probabilités totales au cas d une suite infinie dénombrable d'événements incompatibles n'est pas une conséquence inéluctable des principes de la théorie, mais qu'elle se justifie par les mêmes raisons que l'extension de la notion de longueur à la notion de mesure d'un ensemble linéaire.

M. DE FINETTI vient de publier un intéressant article *Sui passaggi al limite nel Calcolo delle Probabilità*, « Rend. R. Ist. Lombardo », Vol. LXIII, 1930, où il se rencontre en quelques points avec les sujets que j'ai exposés dans mes cours de 1929 et 1930 et résumés dans un mémoire de « Metron » sous presse.

Il donne plusieurs exemples qui conduisent à une contradiction quand on admet l'extension du théorème des probabilités totales au cas d'un ensemble dénombrable infini d'événements incompatibles.

Comme je l'avais indiqué dans mes cours et dans mon mémoire, il est en effet important de noter que cette extension du théorème des probabilités totales n'est pas une conséquence inéluctable des principes généralement admis à la base du Calcul des Probabilités. M. DE FINETTI a eu raison d'attirer l'attention sur ce point. Cependant, il n'a envisagé qu'une des deux alternatives où le conduisent ses exemples: Si ceux-ci ont un sens, l'extension susdite n'est pas admissible. Il reste utile de signaler la seconde alternative: savoir, que ses exemples n'ont plus de sens dans les cas où la même extension est légitime. Il considère page 157, un nombre aléatoire X qui ne peut prendre que des valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s, \ldots$ en nombre infini et il *les suppose également probables*. Or, le théorème des probabilités totales appliqué, aux n première valeurs montre que la somme des probabilités de ces valeurs serait au plus égale à l'unité alors que le terme général de la série illimitée de ces probabilités reste constant. Le terme général est donc nul et la somme de la série est nulle. Il est donc impossible de supposer ces cas également probables si l'on admet l'extension du principe des probabilités totales (auquel cas il faudrait égaler à l'unité la somme de la série).

Une même alternative se presente dans la théorie de la mesure d'un ensemple On pourrait utiliser une remarque de M. VITALI. Supposons qu'on sache mesurer tout ensemble linéaire borné E par un nombre $m(E) \geqq 0$. Cetté mesure satisferait à la condition

$$m(E_1 + E_2) = m(E_1) + m(E_2)$$

pour deux ensembles disjoints E_1, E_2 quelconques. Ce serait une définition de la mesure (conforme à l'intuition) suivant laquelle deux ensembles superposables auraient même mesure et où un intervalle de longueur 1 aurait pour mesure 1. Alors, il y aurait (1) au moins une suite infinie d'ensembles disjoints $I_1, I_2, \ldots$, tels que

$$m(I_1 + I_2 + \ldots + I_n + \ldots) > m(I_1) + m(I_2) + \ldots + m(I_n) + \ldots$$

bien que, pour tout n:

$$m(I_1 + I_2 + \ldots + I_n) = m(I_1) + m(I_2) + \ldots + m(I_n).$$

De même que, si l'on adopte la définition de la mesure au sens de M. LEBESGUE, il y a des ensembles linéaires non mesurables, de même, si on adopte une définition de la probabilité où l'extension du théorème des probabilités totales est admise par définition, il y aura des événements qui ont une probabilité déterminée et d'autres qui n'en auront pas. Les événements considérés dans les exemples de M. DE FINETTI, n'ont, dans ce cas, pas tous une probabilité; telle est, croyons-nous, la solution des objections présentées par cet auteur.

---

(1) G. VITALI, « *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta* », Bologna, Tip. Gamberini et Parmeggiani, 1905.

Voir aussi S. BANACH, « *Sur les problème de la mesure* », Fund. Math., t. IV, 1923; pp. 7-23.

A PROPOSITO DELL' ESTENSIONE DEL TEOREMA DELLE PROBABILITÀ TOTALI ALLE CLASSI NUMERABILI.

Nota del dott. BRUNO DE FINETTI

(Adunanza del 3 luglio 1930)

Sunto. — Rispondendo a delle obiezioni del FRÉCHET (1), l'A. spiega perchè non ritiene che detta estensione sia legittima.

Sono assai lieto che il Prof. FRÉCHET, in seguito alla mia nota *Sui passaggi al limite nel calcolo delle probabilità,* mi abbia sottoposte le obiezioni che precedono (1), dandomi modo così di chiarire il mio pensiero sull' interessante argomento cui si riferiscono le sue critiche. La questione è la seguente. Data un' infinità numerabile di eventi incompatibili di probabilità $p_1\, p_2 \ldots p_n \ldots$, possiamo noi asserire che la probabilità p della loro somma logica (la probabilità cioè che si verifichi *uno* di questi eventi) è la somma della serie delle p (che manifestamente converge)?

Dal fatto che il teorema delle probabilità totali sussiste nelle classi finite scende evidentemente che questa probabilità p è *non minore* della somma $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$, ma *non* scende che debba essere uguale. Può darsi cioè che in ogni classe finita il teorema delle probabilità totali sia sodisfatto senza che valga l' analoga proprietà nelle classi numerabili; tale proprietà può sussistere come caso limite, e potremo esprimerla dicendo che la probabilità è *sommabile* nella classe considerata di eventi (2). La questione è allora, formalmente, di decidere se le leggi di probabilità che sodisfano, nelle classi finite, il teorema delle probabilità totali si debbano considerare tutte come ammissibili, o se

(1) V. nota precedente.

(2) Cfr. la mia nota *Sulla proprietà conglomerativa delle probabilità subordinate* (Rend. R. Ist. Lomb., 1930). V. anche LÉVY, *Calcul des Probabilités*, Appendice.

ci si debba limitare a considerare tali quelle sole tra esse che risultano sommabili in ogni classe numerabile.

Nel rispondere a tale questione sembra che i diversi Autori ritengano di poterne disporre a loro piacimento, a seconda che risulti loro più comodo: il raffronto che fa il FRÉCHET col problema della misura lo mostra in modo lampante. Mi sembra però che il caso sia molto diverso. Se si tratta di introdurre una nozione matematica, potremo certo definirla nel modo più opportuno, e far sì, purchè ciò sia *possibile*, che risultino sodisfatte certe condizioni che ci sembrano utili. Se invece una certa nozione, nel nostro caso la probabilità, ha già un senso ben definito, si tratta non di fare una convenzione ma di dimostrare un teorema, e non basta che quelle proprietà siano possibili, ma occorre che, per il significato stesso del problema, risultino *necessarie*.

Dire che l' evento E ha una probabilità uguale a p, o ha il significato più o meno intuitivo a tutti noto, o è una frase perfettamente inutile. Limitiamoci dunque al primo caso, e si abbia un' infinità numerabile di eventi incompatibili $E_1\, E_2 \ldots E_n \ldots$, la cui somma logica indicheremo con E. Dal fatto, ad es., che le probabilità di $E_1\, E_2 \ldots E_n \ldots$ siano tutte nulle, siamo noi in grado di concludere che anche E ha probabilità nulla? Possiamo concludere che è praticamente impossibile, o possiamo ritenere invece che abbia una probabilità finita, o addirittura che possa essere praticamente certo? È evidente che non è questa una questione di *convenzione*. È una conclusione che ha un effettivo contenuto concettuale, e può essere vera o falsa, ma bisogna in ogni caso *dimostrarlo* e non *supporlo*.

C' è una difficoltà abbastanza grave, ed è che il concetto stesso di probabilità è per solito definito in modo piuttoso vago, e insufficente forse a illuminare completamente la questione: siamo così condotti a delle considerazioni molto più generali, e che mi sembra abbiano un' importanza che trascende di gran lunga la questione di cui qui ci occupiamo. Per rispondere in modo esauriente bisogna prima definire la probabilità in modo rigoroso e completo, così da poter sempre rispondere se una supposta proprietà sussiste o non sussiste. Di ciò mi occupo da tempo, e spero di far noto quanto prima il mio punto di vista sull' argomento, e il metodo che ne deriva di definire la probabilità e dedurre impeccabilmente tutte le proprietà di cui gode. Le critiche filosofiche sono esposte nel lavoro (già redatto) PROBABILISMO - *Saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza*, cui seguirà un altro *Fondamenti per la teoria delle* *probabilità* (attualmente in preparazione). Nel secondo di essi, pur senza addentrarmi nello studio delle probabilità nelle classi infinite, che svilupperò meglio in seguito, dimostro che la validità del teorema delle probabilità totali *nelle sole classi finite* è condizione non solo necessaria *ma anche sufficente* perchè una legge di probabilità sia ammissibile. Naturalmente, si potrà criticare e non accettare la definizione e la trattazione che propongo e di cui mi basta l'aver fatto cenno. Sta il fatto comunque, ed è questo che mi preme qui di far rilevare, che per rispondere, in un modo o nell'altro, alla questione, bisogna partire dal significato concettuale del problema e fare un ragionamento rigoroso, e non già stabilire una convenzione ingiustificata. Una tale convenzione significherebbe soltanto questo: che ci limitiamo volontariamente a considerare il caso delle leggi sommabili, senza curarci di sapere se le altre sono pure ammissibili.

Non è possibile qui, evidentemente, se non preannunciare e accennare il modo di procedere sistematico e corretto. Ma possiamo però facilmente persuaderci che la proprietà in discussione, che sembra così naturale limitandosi a considerarla dal punto di vista formale e algoritmico, sarebbe invece molto bizzarra a volerne tener presente il senso. Essa verrebbe infatti ad escludere che si possano pensare infiniti eventi incompatibili ugualmente probabili, od anche soltanto infiniti eventi incompatibili le cui probabilità abbiano lo stesso ordine di grandezza (il rapporto fra due loro probabilità qualunque non superi mai un certo limite superiore K). Data un'infinità numerabile di eventi incompatibili, si dovrebbe poterne sempre estrarre un numero finito di fronte a cui l'insieme di tutti gli altri infiniti sia trascurabile. Molti problemi sono stati considerati da diversi Autori che dovrebbero, accettando quella proprietà, ritenersi privi di senso. E ciò senza che se ne veda altra ragione che il desiderio di salvarsi da qualche difficoltà.

Infine, anche a volersi limitare a considerazioni formali, dubito fortemente che quella restrizione, ammesso che fosse in nostro arbitrio adottarla oppure no, potrebbe essere consigliabile. Si incontrerebbe infatti un inconveniente a mio modo di vedere assai più grave e sostanziale di quelli che si vorrebbero eliminare: non si potrebbe più dire che, se una legge di probabilità tende a una legge limite, tale legge limite è una legge di probabilità. Data ad es. un'infinità d'eventi incompatibili $E_1\ E_2 \ldots E_n \ldots$, la legge di probabilità L_h in cui i primi h eventi hanno probabilità $1/h$ e gli altri probabilità nulla tende, per $h \rightarrow \infty$; alla legge di probabilità in cui tutti gli eventi sono ugualmente probabili. Una legge ammissibile tenderebbe dunque a una legge non ammissibile.

Quanto ai lavori del FRÉCHET, pur non potendo accettare, per le ragioni ora dette, quanto in essi dipende dalla condizione di sommabilità, mi sembra che siano molto notevoli specialmente per l'idea di studiare la convergenza delle variabili casuali dal punto di vista degli spazi astratti, argomento di cui è ben nota la magistrale trattazione dello stesso Autore (1).

***

Ho il piacere di poter riprodurre queste righe del Prof. FRÉCHET, al quale sottoposi la precedente nota di risposta.

« Je sympathise tout à fait avec votre idée qu' on ne doit pas esquiver les difficultés au moyen de conventions arbitraires. Toutefois je ne suis pas sûr que on puisse faire autrement dans la question qui nous interesse. Vous faites observer que la probabilité a un sens physique : c' est ce que j' ai taché de montrer avec mon collaborateur M. HALBWACHS dans notre petit livre « *Le Calcul des Probabilités à la portée de tous* » (Dunod, Paris, 1924). Mais la longueur a un sens physique qui est pour le moins aussi clair, et cepedant il y a incertitude en ce qui concerne le sens qu' on doit donner à la longueur d' un ensemble et ce sont des conventions qui ont permis de lui en donner, par exemple par la mesure de LEBESGUE. Partant du sens physique, il est impossible de *demontrer* que la longueur d' un ensemble satisfait à la condition $m(E_1 + E_2 + ...) = m(E_1) + m(E_2) + ...$ ».

La differenza fra i due punti di vista non sembra dunque insormontabile : non si tratta di un' opposizione di principio al modo di impostare la questione che ho sostenuto, ma c' è solo il dubbio che le maggiori difficoltà che esso comporta siano superabili.

Quanto all' analogia col problema della misura, mi sembra che vi sia sempre una diversità essenziale, nonostante si abbia anche qui un senso intuitivo, come il FRÉCHET ha ragione di affermare. Ogni concetto, anche matematico, è più o meno direttamente e distintamente suggerito dall' intuizione : tuttavia la definizione è totalmente arbitraria, purchè le conseguenze che se ne

(1) *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

vogliono trarre siano puramente formali: siano cioè delle frasi in cui quel concetto interviene nel senso convenzionale che ha assunto per la definizione stessa. Questo è il caso della misura; un caso diverso si avrebbe invece, evidentemente, per il peso, perchè non si può imporre alla bilancia di funzionare secondo la nostra definizione; così mi sembra un caso diverso quello delle probabilità.

Nel caso delle probabilità il guaio è che quando, *basandoci su una convenzione*, si conclude ad es. che la probabilità di una somma d' infiniti eventi incompatibili a probabilità nulla ha una probabilità nulla, noi pensiamo intuitivamente che questa somma è un evento *pressochè impossibile*, mentre la definizione ci permette solo di concludere, e a tutto rigore, che ha un valore uguale a zero quella funzione numerica che abbiamo convenzionalmente battezzata « probabilità ».

Estratto dai *Rendiconti* del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere
Sere II, Vol. LXIII, Fasc. XI-XV.

PAVIA — PREMIATA TIPOGRAFIA SUCCESSORI FUSI — 1930