STUDIO DELLE OMOGRAFIE VETTORIALI IN RELAZIONE ALLE RADICI DI $I_n(\alpha - x) = 0$.

In: « *Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei.* Roma, 1929, pp. 408-417.

Studio delle omografie vettoriali in relazione alle radici di $I_n(\alpha - x) = 0$

Nota di **BRUNO de FINETTI**, presentata dal S. O. G. GIORGI

Sommario. — Ad ogni radice reale o coppia di radici complesse coniugate di $I_n(\alpha - x) = 0$ corrisponde uno spazio invariante di α a c, rispettivamente $2c$, dimensioni, se c è l'ordine di molteplicità della radice reale o rispettivamente di ciascuna delle due radici complesse coniugate. Scegliendo opportunamente dei vettori appartenenti a tali spazi invarianti si può ottenere un'ennupla che gode di proprietà semplici, e risulta perciò in molti casi praticamente utile.

1. Se l'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$ ha n radici reali e distinte $x_1\, x_2 \ldots x_n$ è noto che esistono n vettori linearmente indipendenti $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ tali che

$$\alpha \boldsymbol{a}_1 = x_1\, \boldsymbol{a}_1\,,\ \alpha \boldsymbol{a}_2 = x_2\, \boldsymbol{a}_2, \ldots,\ \alpha \boldsymbol{a}_n = x_n\, \boldsymbol{a}_n\ .$$

Ci proponiamo di determinare un'ennupla di vettori che goda di proprietà analoghe nel caso più generale; oltre l'interesse teorico che tale risultato potesse presentare, sarà spesso utile in pratica, per facilitare l'impostazione e la soluzione di vari problemi, o per arrivare sinteticamente a delle conclusioni semplici, di riferirsi momentaneamente a tale ennupla privilegiata.

Fu appunto da un problema pratico che ebbero origine queste ricerche: per riconoscere la stabilità dell'equilibrio in un punto-zero di un campo di velocità [1], si è condotti a studiare le proprietà asintotiche dell'omografia $e^{\lambda\alpha}$, ove α è l'omografia $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dP}$ « derivata della velocità rispetto al punto P » cal-

[1] Per l'origine prima di queste ricerche, vedasi la seconda delle mie note: *Conservazione e diffusione dei caratteri mendeliani*, Rend. R. Acc. Naz. d. Lincei, vol. V, S. 6ª, 1° sem., fasc. 11 e 12, giugno 1927.

colata nel punto-zero, λ è un parametro, e l'esponenziale di un'omografia è l'importante operazione definita dal GIORGI:

$$e^{\alpha} = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n .$$

È evidente che se α ha le n radici tutte reali e distinte, cosicchè $\alpha \boldsymbol{a}_i = x_i \boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, risulta $e^{\alpha} \boldsymbol{a}_i = e^{x_i} \boldsymbol{a}_i$, e l'omografia e^{α} è con ciò completamente individuata, e in modo intuitivo. A un risultato analogo (1) si può arrivare, per il caso generale, in base ai risultati che stabiliremo nel presente lavoro.

2. Se x è radice reale, multipla d'ordine c dell'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$, l'omografia $\gamma = \alpha - x$ ha *caratteristica* c (cioè ha nulli gli invarianti d'ordine $n, n-1, \ldots, n-c+1$, ma non l'invariante d'ordine $n-c$), e, come ho dimostrato in altro recente lavoro (2), si possono determinare dei vettori $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ tali che, per un certo h_i,

$$\gamma^{h_i} \boldsymbol{a}_i = 0 , \qquad \gamma^{h_i - 1} \boldsymbol{a}_i \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

in modo che i vettori

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{a}_1 , \gamma \boldsymbol{a}_1 , \gamma^2 \boldsymbol{a}_1 , \ldots , \gamma^{h_1 - 1} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 , \gamma \boldsymbol{a}_2 , \gamma^2 \boldsymbol{a}_2 , \ldots , \gamma^{h_2 - 1} \boldsymbol{a}_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{a}_s , \gamma \boldsymbol{a}_s , \gamma^2 \boldsymbol{a}_s , \ldots , \gamma^{h_s - 1} \boldsymbol{a}_s \end{array}$$

risultino linearmente indipendenti.

Ogni vettore $\boldsymbol{a}_i$ — *vettore primitivo d'ordine h_i rispetto ad* $(\alpha - x)$ — assorbe h_i radici, e quindi $\Sigma h_i = c$. Nonostante l'arbitrarietà di cui si dispone in generale per tale scelta, il numero t_h dei vettori primitivi d'ogni singolo ordine h che vi figurano è fisso, e dipende dal *rango* (numero delle direzioni nulle indipendenti) delle potenze di γ. Detto r_i il rango di γ^i, è precisamente

$$t_h = 2r_h - (r_{h-1} + r_{h+1}) .$$

(1) V. « *Sul comportamento di $e^{\lambda\alpha}$ e sul concetto di omografia stabile* », Atti Pont. Acc. Scienze, 1929.

(2) V. « *Caratteristica di un'omografia vettoriale* », Atti Pont. Acc. Scienze, 1929.

Consideriamo uno generico dei vettori $\boldsymbol{a}_i$; diciamolo $\boldsymbol{a}$, e sia h il suo ordine. Nel nostro caso, in cui $\gamma = \alpha - x$, sarà

$$\begin{aligned}
\alpha \boldsymbol{a} &= (\gamma \boldsymbol{a}) &&+ x\boldsymbol{a} \\
\alpha(\gamma \boldsymbol{a}) &= (\gamma^2 \boldsymbol{a}) &&+ x(\gamma \boldsymbol{a}) \\
\alpha(\gamma^2 \boldsymbol{a}) &= (\gamma^3 \boldsymbol{a}) &&+ x(\gamma^2 \boldsymbol{a}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha(\gamma^{h-2} \boldsymbol{a}) &= (\gamma^{h-1} \boldsymbol{a}) &&+ x(\gamma^{h-2} \boldsymbol{a}) \\
\alpha(\gamma^{h-1} \boldsymbol{a}) &= &&\quad\; x(\gamma^{h-1} \boldsymbol{a}) \,.
\end{aligned}$$

Abbiamo cioè una successione di h vettori, che possiamo indicare

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{p}_2 = \gamma \boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{p}_3 = \gamma^2 \boldsymbol{a}\,, \ldots,\ \boldsymbol{p}_h = \gamma^{h-1} \boldsymbol{a}$$

legati dalla relazione ricorrente

$$\alpha \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_{i+1} + x \boldsymbol{p}_i$$

(ove s'intenda $\boldsymbol{p}_{h+1} = 0$).

Di tale successioni ne abbiamo tante quant'è l'ordine di molteplicità della radice di $I_n(\alpha - x) = 0$, quando ciascuna si conti h volte; in tutto si hanno così c vettori linearmente indipendenti.

3. Se le radici di $I_n(\alpha - x) = 0$ sono tutte reali, possiamo scegliere in tal modo per ciascuna di esse tanti vettori linearmente indipendenti del tipo considerato quent'è il suo ordine di molteplicità; si ottiene complessivamente un'ennupla di vettori, che, come faremo vedere, sono sempre linearmente indipendenti.

Dimostreremo anzi, più in generale, che sono linearmente indipendenti gli spazi R_i definiti dalle equazioni $(\alpha - x_i)^n \boldsymbol{u} = 0$, ove le x_i siano le diverse radici reali di $I_n(\alpha - x) = 0$. Cioè che, scelto comunque un vettore per ciascuno di tali spazi, si ottiene sempre un sistema di vettori linearmente indipendenti. Un vettore si dirà linearmente dipendente da un sistema di spazi se è combinazione lineare di vettori appartenenti ciascuno ad uno di tali spazi; tale decomposizione è *unica* se gli spazi sono linearmente indipendenti.

Supponiamo di sapere che sono linearmente indipendenti i primi m spazi $R_1 \ldots R_m$ relativi alle radici $r_1 \ldots r_m$, e dimostriamo che lo sono ancora gli $m + 1$ spazi $R_1 \ldots R_{m+1}$ relativi alle radici $r_1 \ldots r_{m+1}$. Scriviamo per brevità

$x_{m+1} = x$, e supponiamo che un vettore $\boldsymbol{u}$, linearmente dipendente dai primi m spazi, sodisfi l'equazione $(\alpha - x)^n \boldsymbol{u} = 0$. Scomponiamo $\boldsymbol{u} = \Sigma \boldsymbol{u}_i$, con $\boldsymbol{u}_i$ appartenente a $\mathrm{R}_i\,(i = 1, 2, \ldots, m)$, cioè tale che $(\alpha - x_i)^n \boldsymbol{u}_i = 0$; gli $\boldsymbol{u}_i$ sono univocamente determinati. Osserviamo che il vettore $(\alpha - x)^n \boldsymbol{u}_i$ sodisfa l'equazione $(\alpha - x_i)^n \boldsymbol{z} = 0$ (infatti $(\alpha - x_i)^n (\alpha - x)^n \boldsymbol{u}_i = (\alpha - x)^n (\alpha - x_i)^n \boldsymbol{u}_i = 0$) e appartiene quindi, come $\boldsymbol{u}_i$, ad R_i; perchè risulti

$$(\alpha - x)^n \boldsymbol{u} = \Sigma (\alpha - x)^n \boldsymbol{u}_i = 0$$

dev'essere quindi $(\alpha - x)^n \boldsymbol{u}_i = 0$ per qualunque i.

Rimane a dimostrare, per provare l'asserto, che ciò implica $\boldsymbol{u}_i = 0$, ed è quindi $\boldsymbol{u} = 0$. E basterà all'uopo stabilire la proprietà: che un vettore $\boldsymbol{z} \neq 0$ non può sodisfare l'equazione $(\alpha - x)^n \boldsymbol{z} = 0$ contemporaneamente per due valori distinti, x_1 e x_2, di x.

Sia infatti $(\alpha - x_1)^n \boldsymbol{z} = (\alpha - x_2)^n \boldsymbol{z} = 0$, e sviluppiamo

$$(\alpha - x_2)^n \boldsymbol{z} = [(\alpha - x_1) + (x_1 - x_2)]^n \boldsymbol{z} = (x_1 - x_2)^n \boldsymbol{z} + \sum_1^n{}_i \binom{n}{i} (x_1 - x_2)^{n-i} (\alpha - x_1)^i \boldsymbol{z} \;;$$

sia ora h il massimo intero per cui $(\alpha - x_1)^h \boldsymbol{z} \neq 0$ (certamente $0 \leq h < n$) avremo

$$(\alpha - x_1)^h (\alpha - x_2)^n \boldsymbol{z} = (x_1 - x_2)^n (\alpha - x_1)^h \boldsymbol{z} + \sum_1^n{}_i \binom{n}{i} (x_1 - x_2)^{n-i} (\alpha - x_1)^{h+i} \boldsymbol{z} =$$
$$= (x_1 - x_2)^n (\alpha - x_2)^h \boldsymbol{z}$$

e d'altronde

$$(\alpha - x_1)^h (\alpha - x_2)^n \boldsymbol{z} = 0$$

da cui

$$(x_1 - x_2)^n (\alpha - x_1)^h \boldsymbol{z} = 0 \;,$$
$$(x_1 - x_2)^n = 0$$
$$x_1 = x_2 \;.$$

4. Sia $a + ib$ una radice complessa di $\mathrm{I}_n(\alpha - x) = 0$. Allora anche $a - ib$ è radice della stessa equazione, e, moltiplicando, si deduce $\mathrm{I}_n[(\alpha - a)^2 + b^2] = 0$. Ponendo $\beta = \frac{1}{b}(\alpha - a)$, risulta $\mathrm{I}_n(\beta^2 + 1) = 0$; esiste $\boldsymbol{u}$ per cui $\beta^2 \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$, e allora anche $\beta \boldsymbol{u}$ gode della stessa proprietà:

$$\beta^2 \beta \boldsymbol{u} = \beta \beta^2 \boldsymbol{u} = \beta(-\boldsymbol{u}) = -\beta \boldsymbol{u} \;.$$

E per ogni vettore z del sistema lineare (a 2 dimensioni) determinato da u e βu sarà ancora $\beta^2 z = -z$. Esiste quindi una giacitura a due dimensioni dentro la quale è

$$\alpha = a + b\beta \,, \qquad \text{e} \qquad \beta^2 = -1 \,.$$

È questo, mutata solo la forma, il teorema stabilito da BURGATTI (1); si rileverà l'analogia fra β e i, e quindi fra l'espressione $a + b\beta$ e la radice $a + ib$, che rende perfetto il riscontro fra la proprietà ora ricordata e quella ben nota delle radici reali (esistenza di una direzione per la quale $\alpha = x$).

5. Sia c l'ordine di molteplicità della radice $a + ib$ (e quindi anche di $a - ib$). Allora la caratteristica di $(\alpha - a)^2 + b^2$ è $2c$. Dimostriamo, ciò che è la stessa cosa, ma rende più breve e intelliggibile la scrittura, che se i e $-i$ sono radici multiple d'ordine c per $I_n(\beta - x) = 0$, la caratteristica di $\beta^2 + 1$ è $2c$. Infatti il termine non nullo di grado minimo nei polinomi $I_n(\beta + i + ix)$ e $I_n(\beta - i - ix)$ è quello in x^c; sarà quindi il termine in x^{2c} il primo non identicamente nullo in

$$\begin{aligned} I_n(\beta + i + ix) \,.\, I_n(\beta - i - ix) &= I_n[\beta^2 + (1 + x)^2] = \\ &= I_n[(\beta^2 + 1) + (2x + x^2)] = \\ = I_n(\beta^2 + 1) + (2x + x^2)\, I_{n-1}(\beta^2 + 1) &+ (2x + x^2)^2\, I_{n-2}(\beta^2 + 1) + \\ + \ldots + (2x + x^2)^{n-1}\, I_1(\beta^2 + 1) &+ (2x + x^2)^n . \end{aligned}$$

Per ciò occorre e basta che siano nulli i primi $2c$ invarianti: $I_{n-h}(\beta^2 + 1) = 0$ $(h < 2c)$, e sia $I_{n-2c}(\beta^2 + 1) \neq 0$.

Sia b un vettore primitivo d'ordine h per $(\beta^2 + 1)$: sia cioè:

$$(\beta^2 + 1)^h\, b = 0 \;; \qquad (\beta^2 + 1)^{h-1}\, b \neq 0 \;;$$

non esiste un vettore y tale che $b = (\beta^2 + 1)\, y$.

Dimostriamo che anche βb gode delle medesime proprietà. Infatti

$$\begin{aligned} (\beta^2 + 1)^h \,.\, \beta b &= \beta \,.\, (\beta^2 + 1)^h\, b = 0 \;; \\ (\beta^2 + 1)^{h-1} \,.\, \beta b &= \beta \,.\, (\beta^2 + 1)^{h-1}\, b \neq 0 \;, \end{aligned}$$

(1) BURGATTI, *Sulle equazioni algebriche a matrice*, Boll. U. M. I., Anno VII, N. 2, Aprile 1928.

altrimenti sarebbe anche

$$\beta \, . \, \beta(\beta^2+1)^{h-1} b = 0 \ , \quad (\beta^2+1)^h b = (\beta^2+1)^{h-1} b \neq 0 \ ;$$

e se fosse $(\beta^2+1)\, y = \beta b$, sarebbe $(\beta^2+1)\,(b-\beta y) = b$, e esisterebbe cioè un vettore $z = b - \beta y$ tale che $(\beta^2+1)\, z = b$.

Otteniamo così due serie di vettori accoppiati

$$\begin{array}{lllll} b & (\beta^2+1)\, b & (\beta^2+1)^2 b & \ldots & (\beta^2+1)^{h-1} b \\ \beta b & (\beta^2+1)\, \beta b & (\beta^2+1)^2 \beta b & \ldots & (\beta^2+1)^{h-1} \beta b \end{array}$$

che risultano tutti linearmente indipendenti; anzi, più in generale, se si comincia col fissare ad arbitrio un vettore primitivo del massimo ordine possibile, e se ne deduce la duplice serie che ne deriva, si fissa poi un vettore primitivo del massimo ordine disponibile, linearmente indipendente da tutti quelli precedentemente ottenuti, e se ne deduce analogamente la duplice serie che ne deriva, e così si procede finchè esistono vettori primitivi indipendenti da quelli già scelti, si arriva a un sistema di $2c$ vettori *linearmente indipendenti.*

Dimostriamolo. I vettori scelti fino a un certo punto e quelli da essi dedotti formino un sistema di vettori c_i linearmente indipendenti, e si fissi b indipendente da essi. Allora, per cose note (¹), è un sistema di vettori linearmente indipendenti quello formato dai c_i e b, $(\beta^2+1)\, b$, $(\beta^2+1)^2 b, \ldots$, e se fosse $\beta b = \Sigma \lambda_i c_i$ si ricaverebbe $\beta^2 b = (\beta^2+1)\, b - b = \Sigma \lambda_i \beta c_i$, vettore linearmente dipendente dai c_i perchè i vettori del tipo βc_i dipendono linearmente dai c_i, ciò che appare evidente, e nel modo che studieremo in seguito. E allora, per le proprietà ricordate poc'anzi, si ha ancora un sistema di vettori linearmente indipendenti aggiungendo ai c_i i vettori della duplice serie che deriva da b. Ciò giustifica induttivamente l'ipotesi dell'indipendenza dei vettori già ottenuti, e conduce a concludere che, procedendo nel modo indicato, si arriva a un sistema di vettori linearmente indipendenti. Essi sono in numero di $2c$ perchè tale è la caratteristica di (β^2+1); possiamo anche osservare che i numeri $t_1, t_2, \ldots, t_k$ dei vettori primitivi d'ordine $1, 2, \ldots, k$ sono tutti pari, e ciò implica che ogni potenza $(\beta^2+1)^m$ di (β^2+1) ha il rango r_k pari, e che non si possono avere vettori primitivi d'ordine $h > c$ (e, a maggior

(¹) V. il mio lavoro già citato: *Caratteristica di un'omografia vettoriale.*

ragione, d'ordine $h > \frac{n}{2}$) perchè è

$$n \geq 2c = t_1 + 2t_2 + \ldots + ht_h + \ldots \geq ht_h \geq 2h\,, \quad \text{se} \quad t_h \neq 0\,.$$

Studiamo ora come β operi sui vettori di due successioni accoppiate

$$\begin{array}{lllll} \boldsymbol{b} & (\beta^2+1)\,\boldsymbol{b} & (\beta^2+1)^2\,\boldsymbol{b} & \ldots & (\beta^2+1)^{h-1}\,\boldsymbol{b} \\ \beta\boldsymbol{b} & (\beta^2+1)\,\beta\boldsymbol{b} & (\beta^2+1)^2\,\beta\boldsymbol{b} & \ldots & (\beta^2+1)^{h-1}\,\beta\boldsymbol{b} \end{array}$$

che indicheremo per comodità di scrittura

$$\begin{array}{lllll} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_3 & \boldsymbol{q}_5 & \ldots & \boldsymbol{q}_{2h-1} \\ \boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_4 & \boldsymbol{q}_6 & \ldots & \boldsymbol{q}_{2h}\,. \end{array}$$

Se i è dispari, $i = 2m+1$

$$\beta\boldsymbol{q}_{2m+1} = \beta(\beta^2+1)^m\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{q}_{2m+2}$$

ossia

$$\beta\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}_{i+1}$$

Se i è pari, $i = 2m+2$

$$\beta\boldsymbol{q}_{2m+2} = \beta\,.\,(\beta^2+1)^m\,\beta\boldsymbol{b} = (\beta^2+1)^{m+1}\,\boldsymbol{b} - (\beta^2+1)^m\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{q}_{2m+3} - \boldsymbol{q}_{2m+1}$$

ossia

$$\beta\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_{i-1}$$

(ove s'intenda $\boldsymbol{q}_{2h+1} = 0$).

6. Ritornando al nostro problema, cioè all'omografia $\alpha = a + b\beta$, avremo: i dispari:

$$\alpha\boldsymbol{q}_i = a\boldsymbol{q}_i + b\boldsymbol{q}_{i+1}\ ,$$

i pari:

$$\alpha\boldsymbol{q}_i = a\boldsymbol{q}_i + b(\boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_{i-1})\ .$$

Di successioni come $\boldsymbol{q}_1 \ldots \boldsymbol{q}_{2h}$ ne abbiamo $2c$, quando ciascuna si conti $2h$ volte, e questi $2c$ vettori sono linearmente indipendenti tra loro. Essi sodisfano tutti l'equazione $[(\alpha - a)^2 + b^2]^n\,\boldsymbol{z} = 0$; si osservi anche che se $b = 0$ essa si riduce a $(\alpha - a)^{2n}\,\boldsymbol{z} = 0$, che è effettivamente sodisfatta dai vettori relativi alla radice reale a.

Per ciascuna delle radici reali o delle coppie di radici complesse coniugate di $I_n(\alpha - x) = 0$ potremo scegliere nei modi indicati tanti vettori linearmente indipendenti (di serie dei tipi $\boldsymbol{p}$ o $\boldsymbol{q}$, a seconda che le radici sono reali o complesse) quant'è il suo ordine di molteplicità. Avremo complessivamente un'ennupla di vettori, che, anche in questo caso generale, risultano sempre linearmente indipendenti.

La dimostrazione non differisce sostanzialmente da quella sviluppata al N. 3 per il caso delle radici reali.

Siano R_i gli spazi relativi alle radici (o coppie di radici) $x_i = a_i \pm ib_i$, e supponiamo siano linearmente indipendenti i primi m spazi, definiti dalle equazioni

$$[(\alpha - a_i)^2 + b_i^2]^n \boldsymbol{z} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \;;$$

dimostriamo che sono linearmente indipendenti gli $m + 1$ spazi relativi alle radici $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}$.

Scriviamo brevemente $x_{m+1} = x = a \pm ib$; dobbiamo dimostrare che se un $\boldsymbol{u}$ linearmente dipendente dai primi m spazi, $\boldsymbol{u} = \Sigma \boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, sodisfa l'equazione

$$[(\alpha - a)^2 + b^2]^n \boldsymbol{u} = 0 \;, \qquad \text{è} \qquad \boldsymbol{u} = 0 \;.$$

Osserviamo che il vettore $[(\alpha - a)^2 + b^2]^n \boldsymbol{u}_i$ sodisfa l'equazione

$$[(\alpha - a_i)^2 + b_i^2]^n \boldsymbol{z} = 0 \;,$$

(infatti

$$[(\alpha - a_i)^2 + b_i^2]^n [(\alpha - a)^2 + b^2]^n \boldsymbol{u}_i = [(\alpha - a)^2 + b^2]^n [\alpha - a_i)^2 + b_i^2]^n \boldsymbol{u}_i = 0)$$

e appartiene quindi, come $\boldsymbol{u}_i$, ad R_i. Come nel caso delle radici reali dovremo dunque avere $[(\alpha - a)^2 + b^2]^n \boldsymbol{u}_i = 0$, e ciò implicherà $\boldsymbol{u}_i = 0$, $\boldsymbol{u} = 0$, e proverà cioè il nostro assunto, se potremo dimostrare che un vettore $\boldsymbol{z} \neq 0$ non può sodisfare l'equazione $[(\alpha - a)^2 + b^2]^n \boldsymbol{z} = 0$ contemporaneamente per due coppie distinte, (a_1, b_1) e (a_2, b_2), di numeri (a, b).

Avendo già considerato il caso di due radici reali $(b_1 = b_2 = 0)$, ci limiteremo al caso in cui una almeno delle radici è complessa, e supporremo quindi $b_1 \neq 0$.

Sia $px+q$ il resto della divisione di $[(x-a_2)^2+b_2^2]^n$ per $[(x-a_1)^2+b_1^2]$, avremo

$$[(\alpha - a_2)^2 + b_2^2]^n = p\alpha + q + \gamma$$

ove l'omografia γ contiene a fattore $[(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]$.

Se $\boldsymbol{z}$ è tale che

$$[(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]^n \boldsymbol{z} = [(\alpha - a_2)^2 + b_2^2]^n \boldsymbol{z} = 0 \ ,$$

indicando con h il massimo intero per cui $[(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]^h \boldsymbol{z} \neq 0$ (e sarà $0 \leq h < n$), avremo

$$[(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]^h \gamma \boldsymbol{z} = 0 \ ,$$

e quindi

$$[(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]^h [(\alpha - a_2)^2 + b_2^2]^n \boldsymbol{z} = [(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]^h [p\alpha\boldsymbol{z} + q\boldsymbol{z}] = 0 \, .$$

Ciò implica $p = q = 0$; altrimenti sarebbe infatti

$$\alpha\boldsymbol{v} = \alpha[(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]^h \boldsymbol{z}$$

linearmente dipendente da

$$\boldsymbol{v} = [(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]^h \boldsymbol{z} \ ,$$

ossia, essendo $\boldsymbol{v} \neq 0$, $\alpha\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ (λ numero reale). E allora

$$[(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]\, \boldsymbol{v} = [(\lambda - a_1)^2 + b_1^2]\, \boldsymbol{v} \neq 0$$

(chè $(\lambda - a_1)^2 \geq 0$, $b_1^2 > 0$), assurdo poichè è per ipotesi

$$[(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]\, \boldsymbol{v} = [(\alpha - a_1)^2 + b_1^2]^{h+1} \boldsymbol{z} = 0 \ .$$

Dev'essere dunque $px + q = 0$, ossia $[(x - a_2)^2 + b_2^2]^n$ divisibile per $[(x - a_1)^2 + b_1^2]$. Le radici $a_1 \pm ib_1$ del divisore debbono essere quindi radici anche del dividendo; esso ha le sole radici $a_2 \pm ib_2$, e si conclude che $a_1 \pm ib_1 = a_2 \pm ib_2$, c. d. d.

7. Gli spazi R_i sono spazi invarianti per α; se diciamo *spazio invariante isolato* di α uno spazio R quando:

1) R non dipende linearmente da altri spazi invarianti,

2) ogni spazio invariante R' contenuto in R dipende linearmente da altri spazi invarianti (pure necessariamente contenuti in R),

avremo che gli spazi R_i sono tutti e soli gli spazi invarianti isolati di α.

Tutto lo studio della struttura degli spazi invarianti di un'omografia α si può fondare sulla traccia di questo lavoro. Come risultato teorico questo sarebbe certo il più interessante, e ho intenzione di svilupparlo in seguito; per ora mi serviva, per lo scopo pratico di cui al principio, un'ennupla di vettori che godesse di certe proprietà semplici, e tale ennupla è stata determinata.