BRUNO DE FINETTI

Sul concetto di NUMERO DELLE DIMENSIONI di un sistema lineare

Estratto dagli *Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei*
Anno LXXXIII — Sessione VI del 18 Maggio 1930

ROMA
SCUOLA TIPOGRAFICA PIO X
Via degli Etruschi, 7-9
1930

Sul concetto di *numero delle dimensioni* di un sistema lineare

Nota di **BRUNO de FINETTI**, presentata dal **S. O. GIOVANNI GIORGI** (1)

Sunto. — Si dà un senso intrinseco alla frase: due sistemi lineari hanno ugual numero di dimensioni, e si dimostra che il numero delle dimensioni di un sistema lineare si può caratterizzare in generale mediante un numero cardinale. Per i sistemi a un numero finito n di dimensioni si ha la definizione ordinaria.

I.

Una classe U costituisce un sistema lineare se sono definite le operazioni di somma di due U e prodotto di un U per un numero reale, soddisfacenti alle proprietà ordinarie (V. Burali-Forti e Marcolongo, *Transformations linéaires*). Se esistono n elementi di U, $a_1\, a_2 \ldots a_n$, costituenti un *sistema fondamentale*, e cioè tali che ogni U possa esprimersi in uno e un sol modo sotto la forma

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n$$

si dice che il sistema lineare U *ha n dimensioni*. Se ciò non è possibile, comunque grande si scelga n, si dice che U è un sistema lineare a *un numero infinito di dimensioni*.

Si è tentato in tal caso di determinare il numero delle dimensioni mediante i numeri cardinali, ma, a mio modo di vedere, secondo un indirizzo falso, perchè si è presa come base una circostanza esteriore (la rappresentabilità mediante coordinate) invece di risalire al significato logico e filosofico del concetto. Mi propongo di mostrare qui il modo di procedere che mi sembra rigoroso, e conduce a conclusioni molto diverse.

(1) Nella seduta del 18 maggio 1930.

II.

L'idea di numero, qualunque particolare definizione nominale si adotti, nasce in noi *per astrazione* considerando delle classi *simili.* I numeri cardinali ci si presentano ad esempio pensando alla similitudine fra classi, i numeri ordinali alla similitudine fra classi ordinate. Nel caso più generale, due classi U, U′ soggette a un determinato algoritmo si dovranno dire simili (rispetto ad esso) se esiste una corrispondenza biunivoca che stabilisce una relazione di isomorfismo tra l'algoritmo di U e di U′. Concretando, nel caso che U e U′ siano sistemi lineari, dovremo dire che sono simili se si può stabilire fra i loro elementi una corrispondenza biunivoca che conserva la somma e il prodotto per un numero, o, in altre parole, se esiste una trasformazione lineare biunivoca fra U e U′. Potremo anche esprimere tale fatto dicendo che U e U′ hanno ugual numero di dimensioni [1].

III.

Si tratta ora di vedere se i «numeri di dimensioni» così ottenuti si debbano necessariamente considerare come degli enti totalmente nuovi, o si possano ricondurre ai numeri cardinali. È noto che ciò è possibile nel caso che il numero delle dimensioni sia finito, e allora, come abbiamo ricordato, il numero delle dimensioni può essere rappresentato mediante un numero intero. Ed è chiaro infatti che se U e U′ ammettono come sistemi fondamentali

$$a_1 \quad a_2 \ldots a_n$$
$$a'_1 \quad a'_2 \ldots a'_{n'} ,$$

perchè siano simili è necessario e sufficiente che $n = n'$.

[1] Volendo definire *per astrazione* il numero delle dimensioni di U «Dim U», si può porre:

U, U′ essendo sistemi lineari:

Dim U = Dim U′ se e solo se U è simile a U′.

Volendo definire nominalmente il numero delle dimensioni di U come *proposizione* (al modo di Hilbert), o come *classe* (al modo di Russell), o mediante *operatori* (al modo di Burali-Forti) si può porre rispettivamente:

(Dim U) (x) :≡: x è un sistema lineare simile ad U.

Dim U :≡: classe di tutti i sistemi lineari simili ad U.

Dim U :≡: operatore che applicato a un sistema lineare x produce la classe dei sistemi lineari simili tanto ad U che ad x.

Per stabilire un analogo risultato nel caso generale di un numero infinito di dimensioni si tratterà quindi di estendere

1) la definizione di «sistema fondamentale»;

2) la dimostrazione dell'esistenza di almeno un sistema fondamentale per ogni sistema lineare;

3) la dimostrazione dell'equivalenza di due sistemi fondamentali qualunque d'un medesimo sistema lineare.

IV.

Se per «sistema fondamentale» di un sistema lineare U si definisce: *ogni classe* v *di elementi di U tale che*

1) *ciascuno di essi è linearmente indipendente dai rimanenti,*

2) *ogni U dipende linearmente dai* v,

basterà definire il concetto di «linearmente dipendente» nel caso di infiniti elementi perchè si estenda automaticamente la definizione di sistema fondamentale. Ma un elemento a si dice linearmente dipendente da $a_1\, a_2 \ldots a_n$ se ogni sistema lineare che contiene $a_1\, a_2 \ldots a_n$ contiene necessariamente anche a; sotto questa forma spontanea e significativa la definizione ha senso senza nessuna modificazione, indipendentemente dall'ipotesi che si tratti di elementi in numero finito.

Si vede poi che, se v è una classe di elementi di U (in generale infinita), condizione necessaria e sufficiente perchè l'etemento a ne dipenda linearmente è che a sia combinazione lineare di un numero finito $a_1\, a_2 \ldots a_n$ di elementi appartenenti a v. Infatti: se un sistema lineare contiene v, e in particolare $a_1\, a_2 \ldots a_n$, contiene necessariamente ogni combinazione lineare di $a_1\, a_2 \ldots a_n$, e la condizione è sufficiente. È poi anche necessaria, perchè gli U che la soddisfano costituiscono essi stessi un particolare sistema lineare che contiene v (infatti: se a e b sono entrambi combinazioni lineari di un numero finito di v, $a_1\, a_2 \ldots a_n$, $b_1\, b_2 \ldots b_n$, $a + b$ è combinazione lineare di $a_1\, a_2 \ldots a_n\, b_1\, b_2 \ldots b_n$, che è ancora una classe finita di v).

V.

Vorrei segnalare e richiamare l'attenzione su questo risultato, perchè si faccia il confronto col modo abituale d'intendere l'indipendenza lineare nei sistemi lineari a infinite dimensioni. Più che per l'interesse del problema in sè, per mostrare cosa significhi, quale importanza abbia, e quanto poco ancora è diffuso lo spirito logico nelle definizioni. Ad es., nel modo nostro, gli elementi linearmente dipendenti da $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ sono i polinomi in x; ordinariamente si intendono per tali tutte le serie di potenze. Si sfrutta cioè il concetto di limite, in un senso che *non* è conseguenza della definizione di sistema lineare (non è definibile mediante la somma e il prodotto), ma dipende dal particolare significato (come funzioni) di $1, x, x^2, \ldots$, o, il che è lo stesso, dal particolare sistema di coordinate (i coefficienti dello sviluppo di Taylor) con cui si stabilisce di individuare la serie di potenze. Perdendo di vista il significato logico del concetto, e basandosi su un'apparente analogia formale, si giunge così a una pseudodefinizione totalmente illusoria.

VI.

La dimostrazione dell'esistenza di almeno un sistema fondamentale per ogni assegnato sistema lineare U è una di quelle proprietà che sono evidenti se ci si mette dal punto di vista idealista (di Zermelo), ma che, a volerle dimostrare in modo conforme al punto di vista realista, non si saprebbe di dove abbordarle. Se supponiamo che il numero cardinale di U sia un *aleph*, e quindi si possano disporre i suoi elementi in serie bene ordinata, è evidente che gli elementi di U linearmente indipendenti dai precedenti costituiscono un sistema fondamentale (1).

Indipendentemente da quest'ipotesi, possiamo dare una proprietà in un certo senso inversa della precedente: assegnato un numero cardinale qualun-

(1) Sia v la classe degli U linearmente indipendenti dai precedenti. Un elemento a di v non può essere combinazione lineare di altri, $a_1 a_2 \ldots a_n$, perchè in una classe finita $a\, a_1 a_2 \ldots a_n$ esiste un *ultimo* elemento, il quale dovrebbe dipendere linearmente dai precedenti.

Un elemento a di U, o appartiene a v, o dipende linearmente dai precedenti. Indichiamo in tal caso con a_1 il primo elemento tale che a non dipende linearmente dagli elementi che precedono a_1. Necessariamente a_1 appartiene a v, altrimenti l'aggiunta di a_1 ai precedenti non amplierebbe il sistema lineare degli elementi linearmente dipendenti. Sia m_1 quel numero (univocamente determinato) tale che $a - m_1 a_1$ dipende linearmente dagli elementi che precedono a_1, e diciamo a_2 il primo elemento tale che $a - m_1 a_1$ non dipenda linearmente dagli elementi che precedono a_2; definiamo analogamente m_2, e così di seguito. Poichè una sucsione di numeri ordinali decrescenti è finita, dopo un certo numero n di volte dovremo ottenere

$$a - m_1 a_1 - m_2 a_2 - \ldots - m_n a_n = 0 ,$$

ossia

$$a = m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n ,$$

con $a_1 a_2 \ldots a_n$ elementi di v.

Abbiamo così dimostrato che v gode di entrambe le proprietà che definiscono i sistemi fondamentali.

que m, esiste sempre un sistema lineare che ammette un sistema fondamentale di potenza m. Sia infatti v una classe qualunque di potenza m; nell'insieme delle corrispondenze fra v e numeri reali, consideriamo quelle che assumono valore non nullo solo per un insieme finito di elementi di v: esse costituiscono un sistema lineare, e un sistema fondamentale di esso è evidentemente costituito dalla classe, equivalente a v, delle funzioni che assumono il valore 1 in corrispondenza di un dato elemento di v, e il valore 0 in corrispondenza di tutti gli altri.

VII.

Se esiste un sistema fondamentale per v, ne esistono ovviamente infiniti altri, e si può dimostrare, ciò che tosto faremo, che hanno tutti il medesimo numero cardinale m. Il numero cardinale m caratterizza dunque completamente il numero delle dimensioni di U. Potremo quindi rispondere affermativamente al problema propostoci: si può ricondurre il *numero di dimensioni* a un *numero cardinale*. Ma, mentre, assunto comunque un numero cardinale m, esiste sempre un sistema lineare a m dimensioni, non si può eliminare totalmente il dubbio che (se non sussiste il principio di Zermelo), possano esistere dei sistemi lineari per cui manca un numero cardinale atto a determinarne il numero delle dimensioni. Non ritengo sia il caso di temere troppo quest'eventualità; potremo allora, prescindendone, porre per definizione:
« *numero delle dimensioni di* U » *è il numero cardinale di un qualunque sistema fondamentale di* U.

In simboli (se: U ε sist. lin.):

$$\text{Dim U} \;.=.\; \iota\,[\text{Numc} \frown m \ni (v \;\varepsilon\; \text{sist. fond. di U} \,.\supset_v.\; \text{Numc}\; v = m)].$$

VIII.

Dimostriamo ora che due sistemi fondamentali v e w di un medesimo sistema lineare U hanno lo stesso numero cardinale. Riferiamoci dapprima, per fissare le idee, al caso in cui il sistema fondamentale v è numerabile, e dimostriamo che w è pure numerabile. Siano $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ gli elementi di v; se w è un altro qualunque sistema fondamentale, ogni elemento a_i di v dipenderà linearmente da un classe finita w_i di w. Poichè w_i è contenuta in w, la somma logica dei w^i è contenuta anch'essa in w; inversamente, la somma logica dei w_i contiene w, perchè ogni elemento di U, essendo esprimibile mediante una combinazione lineare delle a_i, è esprimibile mediante una combinazione lineare di elementi delle w_i. E quindi, se w contenesse un elemento a non appartenente ad alcuno dei w_i, a dipenderebbe linearmente dai w diversi da a, e w non sarebbe sistema fondamentale. Quindi w è la somma logica delle w_i; la somma logica di una classe numerabile di classi finite è, al più, numerabile, e pertanto, non potendo essere classe finita, w è numerabile.

In generale: ad ogni elemento a di v facciamo corrispondere la classe (finita) di w, w_a, da cui a dipende linearmente. Otteniamo una classe equivalente a v di classi finite di w, la cui somma logica è uguale a w (la dimostrazione precedente sussiste immutata). Quindi w è, al più, equivalente a v; per lo stesso motivo dev'essere v, al più, equivalente a w, e infine v e w sono equivalenti, c. v. d.

IX.

Per fare un'applicazione, mostriamo che il numero delle dimensioni del sistema lineare delle serie di potenze (e anche delle funzioni razionali, delle funzioni intere, ecc.) non è uguale alla potenza delle classi numerabili, ma alla potenza del continuo.

È noto infatti che un sistema fondamentale per le funzioni razionali è quello costituito dagli elementi

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

e quelli del tipo

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{(x-a)^2}, \ldots, \quad \frac{1}{(x-a)^n}, \ldots$$

in cui il numero a assuma ogni valore reale o complesso. Tale sistema fondamentale ha la potenza del continuo.

Le funzioni analitiche comprendono, in particolare, le funzioni razionali, e d'altronde costituiscono un insieme che ha la potenza del continuo. Il loro numero di dimensioni (a meno che, come numero cardinale, *non esista*) non può essere quindi nè minore nè maggiore della potenza del continuo, ed è quindi uguale.

Anche per le funzioni intere la dimostrazione si ha subito in modo analogo, senza effettivamente costruire un sistema fondamentale. Basta ad es. osservare che costituiscono un sistema lineare, che ammette come sistema fondamentale la classe (potenza del continuo) delle funzioni $x^n e^{\lambda x}$ (n intero non negativo, λ reale o complesso), le funzioni che, insieme alle loro derivate, giacciono in un sistema lineare a un numero finito di dimensioni (funzioni che soddisfano un'equazione differenziale lineare a coefficenti costanti), e queste sono particolari funzioni intere.