SULLA STABILITÀ DEI PUNTI-ZERO DI UN CAMPO VETTORIALE PIANO.

In: « *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana* », 1930, n. 3, pp. 1-7.

Estratto dal *Bollettino dell' Unione Matematica Italiana*
Anno IX - N. 3 - Giugno 1930
Edito dalla Casa Editrice NICOLA ZANICHELLI, Bologna

Sulla stabilità dei punti-zero di un campo vettoriale piano.

Nota di BRUNO DE FINETTI (a Roma).

Sunto. - *Le condizioni altrove determinate per la stabilità di un punto-zero sono state dimostrate sufficienti e si è solo affermato che debbono essere altresì necessarie. Si dimostra che, almeno nel caso piano, lo sono effettivamente.*

Un punto Q, mobile in uno spazio lineare **a** n dimensioni, e la cui velocità v è determinata in funzione del posto P, si trova in equilibrio *stabile* in un punto-zero O del campo vettoriale $v(P)$ (per cui cioè $v(O) = 0$) in cui supponiamo esista l'omografia vettoriale $\alpha = \left[\frac{dv}{dP}\right]_{P=O}$ (derivata della velocità rispetto al punto), quando le radici della sua equazione fondamentale $I_n(\alpha - x) = 0$ hanno tutte la parte reale negativa. Questo teorema è dimostrato in una mia recente nota (¹), dove non è però stabilita rigorosamente, ma soltanto affermata con una possibile traccia di dimostrazione, la proprietà reciproca: che se una almeno delle radici ha parte reale positiva l'equilibrio non è stabile (²).

Mi propongo nella presente nota di completare in questo senso la trattazione, limitatamente però al caso piano ($n = 2$ dimensioni), e di svolgere qualche altra considerazione cui tale caso semplice dà luogo. Non occorre dire che questa dimostrazione parziale rende

(¹) *L'equilibrio stabile in un campo di velocità,* in corso di stampa negli « Atti dell'Accademia Pontificia ».

(²) Si riconosce facilmente che se esistono radici a parte reale nulla, ma non a parte reale positiva, l'equilibrio può essere stabile o instabile a seconda dei casi.

ancor più forte la probabilità che lo stesso risultato debba valere anche nel caso più generale.

1. Riporto anzitutto la definizione precisa di cui, nella nota citata, giustificai l'opportunità dei singoli dettagli: *un punto-zero* O *di un campo di velocità* $\mathbf{v}(P)$ *è un punto d'equilibrio stabile se, fissato comunque un intorno* σ *di* O, *esiste sempre un intorno* σ' *di* O (necessariamente compreso in σ) *tale che se un punto mobile* Q *si trova inizialmente in* σ', *esso si muove tendendo verso* O, *e senza uscire mai da* σ.

Salvo casi critici, tale condizione significa in sostanza che tutte le traiettorie che passano abbastanza vicine al punto O *conducono in* O.

Se il campo di velocità è della forma $v(P) = \alpha(P - O)$ con α omografia vettoriale (1), il problema è risolto dal teorema seguente: *le coordinate del punto mobile* Q, *secondo un opportuno sistema cartesiano, sono funzioni del tempo* λ *della forma* $f(\lambda) = e^{\lambda a}\varphi(\lambda)$ *ove* $\varphi(\lambda)$ *cresce meno rapidamente di* λ^{n+1} (2) *e* a *è la parte reale di una radice* x *dell'equazione* $I_n(\alpha - x) = 0$. Ne scende come ovvio corollario che $f(\lambda) \to 0$, per $\lambda \to \infty$, se e solo se $a < 0$, e che $Q \to O$, ossia tutte le coordinate tendono a zero, se e soltanto se tutte le radici dell'equazione fondamentale hanno la parte reale negativa.

Questo risultato fa già prevedere che varrà il teorema preannunciato: sembra infatti naturale che se, in un intorno di O, il campo $v(P)$ è assimilabile in prima approssimazione al campo $\alpha(P - O)$, O sarà o non sarà insieme punto-zero stabile del campo $v(P)$ e del campo $\alpha(P - O)$. Quest'intuizione, per formare un ragionamento rigoroso, ha bisogno di sviluppi abbastanza ampi, che portano alle conclusioni già riassunte.

2. Dimostriamo, per apportare alla trattazione l'annunciato complemento, che se una almeno delle radici dell'equazione fondamentale ha parte reale positiva, l'equilibrio in un punto-zero O del campo vettoriale piano $v(P)$ non può essere stabile.

(1) Cartesianamente, se le componenti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ della velocità secondo gli assi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sono funzioni lineari omogenee delle coordinate del punto P (prendendo O come origine), e cioè si ha

$$v_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \ldots + a_{in}\xi_n .$$

(2) Precisamente: $\varphi(\lambda)$ è un polinomio in λ oppure un polinomio in cui le singole potenze di λ figurano moltiplicate per seni o coseni. V. la mia nota ***Sul comportamento di*** $e^{\lambda\alpha}$ ***e sul concetto di omografia stabile,*** « Atti Acc. Pontificia », 1929, fasc. supplettivo.

Possiamo osservare intanto che se *tutte* le radici hanno la parte reale positiva è ovviamente impossibile che l'equilibrio sia stabile. Allora infatti il campo vettoriale opposto $v'(P) = -v(P)$ ha in O un punto-zero stabile, perchè l'equazione fondamentale dell'omografia $\alpha' = -\alpha$ ha le stesse radici di quella di α cambiate di segno, e quindi tutte colla parte reale negativa. Ed è manifesto che se un campo di velocità ha in O un punto-zero stabile ciò non può sussistere per il campo di velocità opposto: basta osservare che se le traiettorie percorse in un senso conducono *verso* O, percorse nel senso opposto *escono* da O, e, come è intuitivo e come ho dimostrato, basta l'esistenza di anche una sola traiettoria *uscente da* O per escludere la stabilità dell'equilibrio.

Sia ora $v(P)$ un vettore funzione continua dei punti P del piano, sia O un punto per cui $v(O) = 0$, ed esista in O l'omografia $\alpha = \frac{dv}{dP}$, tale cioè che $|\alpha(P-O) - v(P)| < \varepsilon |P-O|$, ε essendo fissato ad arbitrio, pur di prendere $|P-O| < \theta$.

Siano x_1 e x_2 le due radici di $I_2(\alpha - x) = 0$. Cartesianamente, riferendoci a due assi ortogonali ξ, η, l'omografia α è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_\xi}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\eta}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

e l'equazione $I_2(\alpha - x) = 0$ si esprime

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_\xi}{\partial \xi} - x & \dfrac{\partial v_\xi}{\partial \eta} \\[2ex] \dfrac{\partial v_\eta}{\partial \xi} & \dfrac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - x \end{vmatrix} = x^2 - x\left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial v_\xi}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}\right) =$$

$$= x^2 - x \cdot \operatorname{div} v + \frac{\partial(v_\xi, v_\eta)}{\partial(\xi, \eta)} = 0.$$

Le radici x_1 e x_2, o sono entrambe reali, o sono complesse coniugate; il solo caso che interessa qui trattare è quello in cui x_1 e x_2 sono reali e di segno opposto, perchè in ogni altra ipotesi le loro parti reali hanno sempre lo stesso segno. E allora, o sono negative, e l'equilibrio è stabile, o sono positive, e possiamo concludere già per la precedente osservazione che l'equilibrio è instabile.

Siano dunque x_1 e x_2 reali e di segno opposto, e scriviamo per comodità p e $-q$ la radice positiva e quella negativa $(p, q > 0)$: esisteranno due vettori unitari $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ tali che

$$\alpha \boldsymbol{a} = p\boldsymbol{a}, \quad \alpha \boldsymbol{b} = -q\boldsymbol{b};$$

Il campo di velocità $\alpha(P-O)$ ha come traiettorie le rette a e b passanti per O nella direzione di $\boldsymbol{a}$ e di $\boldsymbol{b}$, percorse rispettivamente divergendo e convergendo verso il punto O, e i rami delle iperboli che hanno tali rette come asintoti, percorsi nella direzione in cui sono asintotici alla retta a. Tale comportamento mette in evidenza che l'equilibrio è instabile, come, per questo caso, già sapevamo; di più, esso ci permette di dimostrare che la stessa conclusione vale per ogni campo di velocità $v(P)$ assimilabile in prima approssimazione al campo $\alpha(P-O)$ nelle vicinanze di O, perchè, come vedremo, si trova che il suo comportamento dev'essere sufficentemente analogo da implicare tale conseguenza.

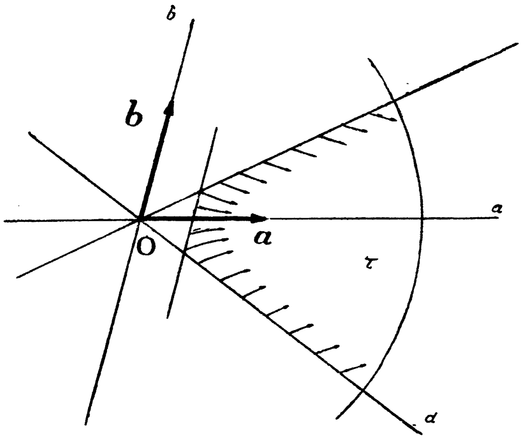
3. Mettiamo in evidenza, nel comportamento del campo $\alpha(P-O)$, quelle proprietà che provano l'equilibrio non poter essere stabile, e che si tratterà di riconoscere comuni anche ad un campo $v(P)$ qualunque, ad esso in prima approssimazione assimilabile.

Abbiansi due rette qualunque c, d passanti per O e che separano le rette a, b, e consideriamo quella delle quattro regioni angolari da esse formate che contiene la direzione di $\boldsymbol{a}$, e che indicheremo con τ. Un punto mobile Q che si trovi nella regione τ e percorra le dette iperboli nel senso detto non può evidentemente uscire da τ nè traversare nella direzione *verso* O una qualunque parallela alla b. Non può quindi muoversi tendendo verso O, e poichè ogni intorno di O contiene punti di τ la condizione di definizione dell'equilibrio stabile non può essere soddisfatta. Altro ragionamento: le due semirette di a sono traiettorie uscenti da O, che per ciò stesso non è punto-zero stabile.

Entrambe queste proprietà si estendono al caso generale.

4. Dimostriamo infatti che, almeno entro un certo intorno σ di O (che potrà sempre essere, ad es., un cerchio abbastanza piccolo di centro O), un punto mobile Q che si trovi inizialmente in τ non può muoversi tendendo verso O, a meno eventualmente che durante il suo tragitto esca da σ. Per rendere alla buona l'idea (ma molto scorrettamente) si potrebbe dire che da un punto di τ infinitamente vicino ad O non si può arrivare in O secondo un cammino infinitesimo, ma, tutt'al più, si può ritornare in O dopo di essercene allontanati e aver percorso una lunga traiettoria.

Si tratta di stabilire che entro un certo cerchio $|P-O|<\theta$ le rette c e d e le parallele alla b nel loro segmento interno a τ sono traversate dalle traiettorie del campo $\boldsymbol{v}(P)$ nel senso che da fuori di τ porta dentro τ e da punti di τ più « vicini » ad O (dalla stessa parte di O rispetto a una generica parallela di b) porta in punti più « distanti » da O (e cioè dalla parte opposta) (vedi Fig.). Par-



tendo da un punto di τ compreso nel nostro cerchio si arriva allora necessariamente fuori dal cerchio, non potendosi all'interno di esso nè traversare c o d, nè avvicinarsi ad O rimanendo entro τ, e cioè traversando le parallele alla b nei loro segmenti interni a τ.

La direzione delle traiettorie è quella della velocità $\boldsymbol{v}(P)$ e potremo scrivere, scomponendola in due vettori paralleli ad $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{v}(P)=\varphi(P)\cdot\boldsymbol{a}+\psi(P)\cdot\boldsymbol{b}.$$

Poniamo similmente $P-O=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$; in τ (rette c e d incluse) avremo ovviamente un numero M tale che

$$|P-O|<M|\lambda|=M\lambda$$

(occorre e basta che M sia maggiore della massima distanza da O dei punti del segmento compreso in τ della parallela a b passante per $O+\boldsymbol{a}$).

Le rette c, d avranno poi l'equazione

$$\mu=h\lambda,\quad \mu=-k\lambda \qquad (h,\ k>0),$$

e il campo τ sarà definito dalle disuguaglianze

$$k\lambda<\mu<h\lambda.$$

Ciò posto, la disuguaglianza

$$|\boldsymbol{v}(P)-\alpha(P-O)|<\varepsilon|P-O|$$

si scriverà

$$|(\varphi(P) - p\lambda)\boldsymbol{a} + (\psi(P) + q\mu)\boldsymbol{b}| < \varepsilon |P - O|$$

da cui *a fortiori*, posto

$$\rho = 1 : \mathrm{sen}\,(a, b) = \{1 - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2\}^{-1/2},$$

$$|\varphi(P) - p\lambda| < \varepsilon\rho |P - O|, \quad |\psi(P) + q\lambda| < \varepsilon\rho |P - O|.$$

Entro τ avremo

$$|\varphi(P) - p\lambda| < \varepsilon\rho M\lambda, \qquad \left|\frac{\varphi(P)}{\lambda} - p\right| < \varepsilon\rho M$$

e quindi

$$\varphi(P) > 0 \quad \text{purchè} \quad \varepsilon\rho M < p.$$

Sulla retta c avremo per di più

$$|\psi(P) + q\mu| = |\psi(P) + qh\lambda| < \varepsilon\rho M\lambda, \qquad \left|\frac{\psi(P)}{\lambda} + qh\right| < \varepsilon\rho M$$

e quindi

$$\psi(P) < 0 \quad \text{purchè} \quad \varepsilon\rho M < qh,$$

e altrettanto vale per d purchè

$$\varepsilon\rho M < qk.$$

Se ε è minore di $\frac{p}{\rho M}, \frac{qh}{\rho M}, \frac{qk}{\rho M}$, ciò che possiamo sempre supporre pur di prendere abbastanza piccolo θ, queste disuguaglianze assicurano appunto che entro il cerchio di raggio θ le traiettorie hanno il comportamento descritto (e mostrato dalla figura).

5. Basandoci sul risultato precedente, possiamo estendere al caso generale l'altra proprietà che prova il carattere instabile dell'equilibrio: l'esistenza di una traiettoria uscente da O. L'insieme delle traiettorie che entrano in τ traversando la semiretta c in punti sempre più vicini ad O ammette evidentemente una linea limite che è una traiettoria ($\boldsymbol{v}(P)$ essendo funzione continua) e che esce da O. Altrettanto si può dire per le traiettorie che traversano d. Salvo, forse, qualche caso critico, è ovvio che queste due linee limiti coincideranno; altrimenti anche tutte le infinite traiettorie comprese fra esse saranno traiettorie uscenti da O. Una traiettoria uscente da O è ivi tangente al vettore $\boldsymbol{a}$ (possiamo infatti scegliere l'angolo τ comunque stretto purchè racchiuda $\boldsymbol{a}$, e detta traiettoria sarà sempre racchiusa, in prossimità di O, entro l'angolo τ). Ricapitolando. Una traiettoria che esce da O è ivi tangente ad $\boldsymbol{a}$ (o a $-\boldsymbol{a}$); esiste sempre almeno una tale traiettoria tangente ad $\boldsymbol{a}$ (e una tangente a $-\boldsymbol{a}$); salvo forse casi critici, esse sono uniche: allora esistono due traiettorie uscenti da O in direzioni opposte, e due sole.

Un ragionamento analogo (si può dire: il medesimo ragionamento applicato al campo $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}$) mostra che una traiettoria che porta in O è ivi tangente a $\boldsymbol{b}$ (o a $-\boldsymbol{b}$); esiste sempre una traiettoria che porta in O (in generale, e forse sempre, una sola) tangente a $\boldsymbol{b}$ (e una tangente a $-\boldsymbol{b}$); esistono quindi, salvo forse casi critici, due traiettorie che portano in O secondo direzioni opposte, e due sole [1].

6. Abbiamo così dimostrato che per avere l'equilibrio stabile è necessario che le parti reali delle radici di $I_2(\alpha - x) = 0$ siano non positive e sufficente che siano negative, che è quanto volevasi dimostrare.

Dimostriamo ora che le condizioni seguenti

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \leq 0, \qquad \frac{\partial(v_\xi, v_\eta)}{\partial(\xi, \eta)} \geq 0$$

equivalgono rispettivamente alla condizione necessaria o a quella sufficente a seconda che si ammetta o non si ammetta anche il caso limite dell'eguaglianza [2].

Si tratta di vedere le condizioni perchè le radici x_1, x_2 di $x^2 - 2ax + b = 0$ abbiano la parte reale negativa (non positiva). Essendo $2a = x_1 + x_2$, $b = x_1 x_2$ e x_1, x_2 potendo essere o reali o complessi coniugati, si vede che se x_1, x_2 hanno parte reale negativa (non positiva) si ha necessariamente $a < 0$, $b > 0$ ($a \leq 0$, $b \geq 0$). Inversamente, essendo $x_1, x_2 = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$, si vede che se $b > 0$, $a < 0$ le radici hanno parte reale negativa. Se poi $a = 0$ o $b = 0$ si sa rispettivamente che sono immaginarie o che una è nulla e una uguale a $2a$. Condizione necessaria e sufficiente perchè x_1, x_2 abbiano parte reale negativa (non positiva) è dunque che sia $a < 0$, $b > 0$ ($a \leq 0$, $b \geq 0$).

Ricordando che l'equazione fondamentale si sviluppa in

$$I_2(\alpha - x) = x^2 - x \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \frac{\partial(v_\xi, v_\eta)}{\partial(\xi, \eta)} = 0,$$

rimane provato l'asserto.

[1] Non si dimenticherà che tutte queste conclusioni si riferiscono sempre, evidentemente, al solo caso di due radici reali di segno contrario.

[2] S'intende naturalmente il valore della divergenza e dell'Jacobiano nel punto O.