MAT0231 - Álgebra II para Licenciatura

Prova Sub

1.- Prove a verdade ou falsidade das seguintes afirmações **(4 pontos)**

(a) O anel $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\mathbb{Q}[x](x^3-13751x^2+259873)}$ é um domínio de integridade e $\mathbb{Q}[x](x^3-13751x^2+259873)$ é um ideal maximal de $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Se I, J são ideais de um anel R, então $I+J=\{x+y\colon x\in I,\, y\in J\}$ é também um ideal de R.

(c) A decomposição do polinômio $x^{11}-1$ como produto de polinômios irredutíveis em $\mathbb{Q}[x]$ é

$$(x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1).$$

(d) Seja $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subcorpos de um anel R. A inserseção $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ é um subcorpo de R.

2.- Encontra um polinômio $p(x)\in\mathbb{Q}[x]$ de grau ≤ 2 tal que **(1.25 pontos)**

$$\overline{(a+bx)}\cdot\overline{(1-x^2)}=\overline{p(x)}$$

em $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\mathbb{Q}[x](x^3+x^2+1)}$ onde $a,b\in\mathbb{Q}$.

3.- Considere os polinômios $f(x), g(x)\in\mathbb{Z}_2[x]$, definidos como **(2 pontos)**

$$f(x)=x^4+x^3+x+1,\quad g(x)=x^3+x^2+x+1.$$

(a) Encontre $\mathrm{mdc}(f(x),g(x))$.

(b) Encontre polinômios $a(x), b(x)\in\mathbb{Z}_2[x]$ tais que $a(x)f(x)+b(x)g(x)=\mathrm{mdc}(f(x),g(x))$.

4.- Considere o polinômio $f(x)=x^6-3\in\mathbb{Q}[x]$. **(3.5 pontos)**

(a) Encontre $\alpha,\xi\in\mathbb{C}$ tais que $\mathrm{Gal}(f(x),\mathbb{Q})=\mathbb{Q}[\alpha,\xi]$.

(b) Calcule $[\mathrm{Gal}(f(x),\mathbb{Q})\colon\mathbb{Q}]$.

(c) Encontre uma base de $\mathrm{Gal}(f(x),\mathbb{Q})$ sobre $\mathbb{Q}$.

5.- Seja K um corpo de $K\subset L$ uma extensão de corpos tal que $[L\colon K]=p$ é um número primo. Mostre que $L=K[u]$ para todo $u\in L\setminus K$. **(1.5 pontos)**