MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Prova P2

Exercícios obrigatórios.

1.- Sejam $(I, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e dirigido e $\Big((M_i)_{i\in I}, (\varphi_i^j \colon M_i \to M_j)_{i\leq j}\Big)$ um sistema direto de R-módulos à direita

(a) Considere o sistema direto $\big((M_k)_{k\in K}, (\varphi_k^l \colon M_k \to M_l)_{k\leq l}\big)$ onde $K \subseteq I$ é um subconjunto *cofinal* de I. Mostre que os R-módulos $\varinjlim_{i\in I} M_i$ e $\varinjlim_{k\in K} M_k$ são isomorfos.

(b) Suponha que $(I, \leq)$ tem um último elemento i_∞. Mostre que $\varinjlim M_i \cong M_{i_\infty}$.

(c) Considere o limite direto $\Big(\varinjlim M_i, (\alpha_i \colon M_i \to \varinjlim M_i)_{i\in I}\Big)$. Suponha que existem $x_i \in M_i$ e $x_j \in M_j$ tais que $\alpha_i(x_i) = \alpha_j(x_j)$. Mostre que existe $k \in I$, $i, j \leq k$ tal que $\varphi_i^k(x_i) = \varphi_j^k(x_j)$.

2.- Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorias. Suponha que $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $F'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ são equivalências de categorias. Mostre que a composição $F'F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é uma equivalência de categorias.

3.- Seja R um anel comutativo e sejam P e Q R-módulos projetivos. Mostre que $P \otimes_R Q$ é um R-módulo projetivo.

Escolha um dos seguintes dois exercícios

4.- Seja R um anel e $\mathcal{C} = Comp(R)$ a categoria dos complexos de R-módulos à direita.

(a) Mostre que $\mathcal{C}$ possui objeto zero.

(b) Mostre como são os monomorfismos em $\mathcal{C}$.

(c) Para cada par de objetos $\underline{A} = (\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{d_n \colon A_n \to A_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}), \underline{B} \in \mathcal{C}$ encontre uma operação binária

$$+\colon Mor_{\mathcal{C}}(\underline{A}, \underline{B}) \times Mor_{\mathcal{C}}(\underline{A}, \underline{B}) \to Mor_{\mathcal{C}}(\underline{A}, \underline{B}), \quad (f, g) \mapsto f + g$$

tal que

(i) $(Mor_{\mathcal{C}}(\underline{A}, \underline{B}), +)$ é um grupo abeliano.

(ii) Para cada tripla de objetos $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C} \in \mathcal{C}$ e morfismos $f_1, f_2, f \in Mor_{\mathcal{C}}(\underline{A}, \underline{B})$, $g_1, g_2, g \in Mor_{\mathcal{C}}(\underline{B}, \underline{C})$ tem-se que

$$g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2, \quad (g_1 + g_2)f = g_1 f + g_2 f.$$

5.- Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias equivalentes. Sejam $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores covariantes tais que GF é naturalmente isomorfo a $1_{\mathcal{C}}$ e FG é naturalmente isomorfo a $1_{\mathcal{D}}$.

(a) Mostre que para cada objeto $D \in \mathcal{D}$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que FC é isomorfo a D.

(b) Para objetos C, C' de $\mathcal{C}$, mostre que $Mor_{\mathcal{C}}(C, C') \to Mor_{\mathcal{C}}(GFC, GFC')$, $f \mapsto GF(f)$ é uma bijeção e fatoriza por $Mor_{\mathcal{C}}(C, C') \to Mor_{\mathcal{D}}(FC, FC')$, $f \mapsto F(f)$.

(c) Para objetos D, D' de $\mathcal{D}$, mostre que $Mor_{\mathcal{D}}(D, D') \to Mor_{\mathcal{D}}(FGD, FGD')$, $g \mapsto FG(g)$ é uma bijeção que fatoriza por $Mor_{\mathcal{D}}(D, D') \to Mor_{\mathcal{C}}(GD, GD')$, $g \mapsto G(g)$.

(d) Mostre que a função $Mor_{\mathcal{C}}(C, C') \to Mor_{\mathcal{D}}(FC, FC')$, $f \mapsto F(f)$, é injetora.

(e) Mostre que a função $Mor_{\mathcal{C}}(C, C') \to Mor_{\mathcal{D}}(FC, FC')$, $f \mapsto F(f)$, é sobrejetora.

continua no verso

Escolha um dos seguintes dois exercícios

6.- Sejam $(I, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\big((M_i)_{i\in I}, (\psi^i_j\colon M_j \to M_i)_{i\leq j}\big)$ um sistema inverso de R-módulos à direita. Dado um R-módulo à direita X, mostre os grupos abelianos $\mathrm{Hom}_R(X, \varprojlim M_i)$ e $\varprojlim \mathrm{Hom}_R(X, M_i)$ são isomorfos.

7.- Seja R um domínio comutativo.

(a) Seja M_R um R-módulo à direita livre de torção. Sejam $x \in M \setminus \{0\}$, $a, a' \in R$ tais que $xa = xa'$. Mostre que $a = a'$.

(b) Suponha que R é um domínio de ideais principais. Sejam $(I, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\big((M_i)_{i\in I}, (\psi^i_j\colon M_j \to M_i)_{i\leq j}\big)$ um sistema inverso de R-módulos à direita divisíveis e livres de torção. Mostre que $\varprojlim M_i$ é um R-módulo injetivo.

Seja $(I, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e dirigido.

- Seja $K \subseteq I$. Se para cada $i \in I$ existe $k \in K$ tal que $i \leq k$, dizemos que K é um subconjunto *cofinal* de I .
- Dizemos que I tem um *último elemento* se existir $i_\infty \in I$ tal que $i \leq i_\infty$ para todo $i \in I$.