MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Prova P1

1.- Sejam $M_1, \dots, M_n$ R-módulos à direita e defina $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. Seja

$$H := \Big[\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)\Big] = \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} : f_{ij} \in \mathrm{Hom}_R(M_j, M_i) \right\}$$

(a) Mostre que H é um anel com as operações: **(0.5 pontos)**

$$(f_{ij}) + (g_{ij}) = (f_{ij} + g_{ij})$$
$$(f_{ij})(g_{ij}) = (h_{ij}) \text{ onde } h_{ij} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik} g_{kj}.$$

(b) Mostre que H é um anel isomorfo a $\mathrm{Hom}_R(M, M)$. **(0.8 pontos)**

(c) Dizemos que um R-módulo a direita S_R é *simples* se $S \neq 0$ e os únicos submódulos de S são $\{0\}$ e S. Mostre que $\mathrm{Hom}_R(S, S)$ é um anel com divisão. **(0.7 pontos)**

(d) Suponha que $M = \bigoplus_{i=1}^{n} S$, onde S é R-módulo à direita simples. Mostre que o anel $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ é isomorfo a $M_n(D)$ onde D é um anel com divisão. **(0.4 pontos)**

2.- Seja R um anel. Seja

$$0 \to U \to V \to F \to 0 \tag{1}$$

uma sequência exata curta de R-módulos à direita onde F é um R-módulo livre. Mostre que a sequência exata (1) cinde. **(1.2 pontos)**

3.- Seja R um anel. Sejam $f \colon A \to B$ e $g \colon A \to C$ homomorfismos de R-módulos à direita. Dado o diagrama do pushout de f e g

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "\beta"] \\ B \arrow[r, "\alpha"] & D \end{tikzcd}$$

Mostre que se g é injetor, então α também é injetor. **(1.2 pontos)**

4.- Considere o seguinte diagrama comutativo de R-módulos à direita e homomorfismos de R-módulos à direita

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ & & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Suponha que as colunas são exatas e as duas linhas inferiores são exatas. Mostre que a primeira linha é exata. **(1.2 pontos)**

5.- Sejam R um anel e

$$0 \to X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z \to 0 \tag{2}$$

uma sequência exata curta de R-módulos à esquerda.

(a) Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos à direita tais que a sequência de grupos abelianos

$$0 \to M_i \otimes_R X \xrightarrow{1_{M_i}\otimes\phi} M_i \otimes_R Y \xrightarrow{1_{M_i}\otimes\psi} M_i \otimes_R Z \to 0$$

é exata para todo $i \in I$. Mostre que

$$0 \to M \otimes_R X \xrightarrow{1_M\otimes\phi} M \otimes_R Y \xrightarrow{1_M\otimes\psi} M \otimes_R Z \to 0$$

é exata onde $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. **(1.5 pontos)**

(b) Se a sequência (2) cinde, mostre que a sequência de grupos abelianos

$$0 \to W \otimes_R X \xrightarrow{1_W\otimes\phi} W \otimes_R Y \xrightarrow{1_W\otimes\psi} W \otimes_R Z \to 0$$

é exata e cinde para todo R-módulo à direita W. **(1.1 pontos)**

Escolha um dos seguintes exercícios

6.- Seja R um anel comutativo.

(a) Mostre que as R-álgebra $M_n(R) \otimes_R M_m(R)$ e $M_{mn}(R)$ são isomorfas para quaisquer inteiros positivos m, n. **(1.2 pontos)**

(b) Sejam A e B duas R-álgebras. Mostre que as R-álgebras $M_m(A) \otimes_R M_n(B)$ e $M_{mn}(A \otimes_R B)$ são isomorfas para quaisquer inteiros positivos m, n. **(1.2 pontos)**

7.- Sejam R um anel M_R um R-módulo à direita e ${}_RN$ um R-módulo à esquerda. Suponha que existem $x_1, \ldots, x_n \in M$, $y_1, \ldots, y_n \in N$ tais que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in M \otimes_R N.$$

(a) Mostre que existem submódulos finitamente gerados M_0 de M e N_0 de N tais que satisfazem as seguintes duas condições.

(i) Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in M_0$, $y_i \in N_0$.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ em $M_0 \otimes_R N_0$.

Dica: Construção do produto tensorial. **(1.2 pontos)**

(b) Mostre que $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ em $M' \otimes_R N'$ para quaisquer submódulos $M' \leq M$ e $N' \leq N$ com $M_0 \subseteq M'$ e $N_0 \subseteq N'$.

(c) Suponha que $M_{\mathbb{Z}}$ é um grupo abeliano. Dado o homomorfismo de grupos abelianos

$$\epsilon \colon M \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \quad x \mapsto x \otimes 1,$$

mostre que $\ker \epsilon = \{x \in M \colon \text{ existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } xn = 0\}$. **(1.2 pontos)**