MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Lista 8

1.- * Seja K um corpo. Mostre que todo K-espaço vetorial é plano.

2.- * Seja R um anel e ${}_RP$ um R-módulo à esquerda plano. Mostre que para toda sequência exata de R-módulos à direita

$$\cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n-1} \to \cdots,$$

a sequência de grupos abelianos

$$\cdots \to A_{n+1} \otimes_R P \xrightarrow{\alpha_{n+1} \otimes 1_P} A_n \otimes_R P \xrightarrow{\alpha_n \otimes 1_P} A_{n-1} \otimes_R P \to \cdots$$

é exata.

3.- * Sejam $\{M_i : i \in I\}$ uma família de R-módulos à esquerda e $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Mostre que M é um R-módulo plano se, e somente se, M_i é plano para cada $i \in I$.

4.- * Sejam R um anel e $(I, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e dirigido. Seja $((N_i)_{i \in I}, (\varphi_i^j : N_i \to N_j)_{i \leq j})$ um sistema direto de R-módulos à esquerda onde N_i é plano para cada $i \in I$. Mostre que $N = \varinjlim N_i$ é plano.

5.- * Seja R um anel e seja M_R um R-módulo à direita. Mostre que se todo R-submódulo finitamente gerado de M é plano, então M_R é plano. (Observação: o recíproco é falso. Por exemplo: seja $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. R_R é plano. Seja N o submódulo de R_R dado por $N = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Considere a inclusão $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\bar{1} \mapsto \bar{4}$. Mas $N \otimes_R \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to N \otimes_R \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ não é injetora pois $0 \neq \bar{2} \otimes \bar{1} \mapsto \bar{2} \otimes \bar{4} = \bar{8} \otimes \bar{1} = 0$)

6.- * Seja R um dominío comutativo.

(a) Mostre que o corpo de frações de R é um R-módulo plano.

(b) Mais geralmente, seja $S \subseteq R$ tal que (a) $1 \in S$, $0 \notin S$; (b) $SS \subseteq S$. Mostre que RS^{-1} é um R-módulo plano.

7.- Sejam R um anel M_R um R-módulo à direita e ${}_RN$ um R-módulo à esquerda. Suponha que existem $x_1, \ldots, x_n \in M$, $y_1, \ldots, y_n \in N$ tais que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in M \otimes_R N.$$

(a) Mostre que existem submódulos finitamente gerados M_0 de M e N_0 de N tais que satisfazem as seguintes duas condições.

(i) Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in M_0$, $y_i \in N_0$.

(ii) $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ em $M_0 \otimes_R N_0$.

Dica: Construção do produto tensorial.

(b) Mostre que $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0$ em $M' \otimes_R N'$ para quaisquer submódulos $M' \leq M$ e $N' \leq N$ com $M_0 \subseteq M'$ e $N_0 \subseteq N'$.

8.- Seja R um anel e ${}_RN$ um R-módulo à esquerda. Mostre que ${}_RN$ é plano se, e somente se, para todos R-módulos à direita finitamente gerados X_R, Y_R e homomorfismo injetor $\alpha : X \to Y$ de R-módulos temos que $\alpha \otimes 1_N$ é injetor. *Dica:* Exercício 7.

9.- Sejam $D_1, \ldots, D_r$ anéis com divisão e $n_1, \ldots, n_r$ inteiros positivos. Mostre que todo R-módulo é plano onde $R = M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$.

10.- Seja $\varphi\colon R \to S$ um homomorfismo de anéis. Podemos considerar S como um R-módulo à esquerda, todo S-módulo M à direita como um R-módulo à direita fazendo $mr = m\varphi(r)$ e, de forma similar, todo S-módulo N à esquerda como um R-módulo à esquerda. Se o R-módulo à direita P_R é um R-módulo plano, então o S-módulo à direita $P' = P \otimes_R S$ é um S-módulo plano. (Dica: para todo ${}_SM$, $S \otimes_S M \cong M$)

11.- * Seja R um domínio comutativo. Se P é um R-módulo plano, então P é livre de torção.

12.- Mostre que $\mathbb{Q}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo plano mas não é um $\mathbb{Z}$-módulo projetivo.

13.- * Seja R um anel.
  (a) Seja $\{P_i\}_{i\in I}$ um conjunto de R-módulos à direita. Mostre que $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ é projetivo se, e somente se, P_i é projetivo para cada $i \in I$.
  (b) Seja $\{E_i\}_{i\in I}$ um conjunto de R-módulos à direita. Mostre que $E = \prod_{i\in I} E_i$ é injetivo se, e somente se, E_i é injetivo para cada $i \in I$.

14.- Se D é um anel com divisão e n um inteiro positivo, então todo $M_n(D)$-módulo à direita é projetivo.

15.- Seja R um anel e P_R um R-módulo à direita finitamente gerado. Mostre que $\mathrm{Hom}_R(P, R)$ é um R-módulo projetivo finitamente gerado à esquerda.

16.- * Seja R um anel e P_R um R-módulo à direita projetivo. Mostre que para toda sequência exata de R-módulos à direita
$$\cdots \to A_{n+1} \overset{\alpha_{n+1}}{\to} A_n \overset{\alpha_n}{\to} A_{n-1} \to \cdots,$$
a sequência de grupos abelianos
$$\cdots \to \mathrm{Hom}_R(P, A_{n+1}) \overset{\alpha_{n+1*}}{\to} \mathrm{Hom}_R(P, A_n) \overset{\alpha_{n*}}{\to} \mathrm{Hom}_R(P, A_{n-1}) \to \cdots$$
é exata.

17.- * Seja R um anel e E_R um R-módulo à direita injetivo. Mostre que para toda sequência exata de R-módulos à direita
$$\cdots \to A_{n+1} \overset{\alpha_{n+1}}{\to} A_n \overset{\alpha_n}{\to} A_{n-1} \to \cdots,$$
a sequência de grupos abelianos
$$\cdots \to \mathrm{Hom}_R(A_n, E) \overset{\alpha_n^*}{\to} \mathrm{Hom}_R(A_{n+1}, E) \overset{\alpha_{n+1}^*}{\to} \mathrm{Hom}_R(A_{n+2}, E) \to \cdots$$
é exata.

18.- Se D é um anel com divisão e n um inteiro positivo, então todo $M_n(D)$-módulo à direita é injetivo.

19.- Seja I um ideal à direita de R. Mostre que
  (a) Se I for um R-módulo (à direita) injetivo, então I é um somando direto do R-módulo à direita R_R.
  (b) Se I for um R-módulo (à direita) injetivo, então I é um R-módulo projetivo.
  (c) O recíproco de (b) não é verdadeiro.

20.- Seja R um anel.
  (a) A soma direta de R-módulos à direita divisíveis é divisível.
  (b) O produto direto de R-módulos à direita divisíveis é divisível.
  (c) Um somando direto de um R-módulo à direita divisível é divisível.
  (d) Um submódulo de um R-módulo à direita divisível pode não ser divisível.
  (e) Seja $(I, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e dirigido. Seja $((M_i)_{i\in I}, (\varphi_i^j\colon M_i \to M_j)_{i\leq j})$ um sistema direto de R-módulos à direita onde M_i é divisível para todo $i \in I$. Mostre que $\varinjlim M_i$ é divisível.

21.- (Teorema do isomorfismo adjunto, segunda versão) Sejam R e S anéis. Dados ${}_RA$, ${}_SB_R$ e ${}_SC$, existe um isomorfismo natural

$$\tau'_{A,B,C}\colon \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C) \to \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B,C)),$$

definido para cada $f\colon B\otimes_R A \to C$, $a\in A$ e $b\in B$, como $\tau'_{A,B,C}(f) = \tau'(f)\colon A \to \mathrm{Hom}_S(B,C)$, $a \mapsto {}_a\tau'(f)$, onde ${}_a\tau'(f)\colon B \to C$, $b \mapsto (b\otimes a)f$.

22.- * Prove o seguinte lema produtor de injetivos.
Sejam R e S anéis. Sejam N um (R,S)-bimódulo tal que ${}_RN$ é um R-módulo à esquerda plano e Z_S um S-módulo à direita injetivo. Mostre que $\widehat{N} = \mathrm{Hom}_S(N,P)$ é um R-módulo à direita injetivo.

23.- Sejam R um anel, H um grupo e $R[H]$ o anel de grupo. Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R[H],\mathbb{Q})$ é um R-módulo à direita injetivo.

24.- Seja R um anel. Consideremos as categorias Mod-R e as subcategorias plenas *proj*-R dos R-módulos projetivos à direita finitamente gerados, e R-*proj* dos R-módulos projetivos à esquerda finitamente gerados.

(a) Mostre que se P é um R-módulo à direita projetivo finitamente gerado, então $D(P) = \mathrm{Hom}_R(P,R)$ é um R-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado.

(b) Mostre que se Q é um R-módulo à esquerda projetivo finitamente gerado, então $D'(Q) = \mathrm{Hom}_R(Q,R)$ é um R-módulo à direita projetivo finitamente gerado.

(c) Mostre que D define um funtor contravariante entre as categorias *proj*-R e R-*proj*. Mostre que D' define um funtor contravariante entre as categorias R-*proj* e *proj*-R.

(d) Mostre que D é uma dualidade com “inverso” D', ou seja, $D'D$ é naturalmente isomorfo a $1_{proj\text{-}R}$, e DD' é naturalmente isomorfo a $1_{R\text{-}proj}$.

25.- Sejam R e S anéis. Sejam ${}_RM_S$, ${}_RN_S$ (R,S)-bimódulos.

(a) Explique como age o funtor $-\otimes_R M\colon$ Mod-$R \to$ Mod-S.

(b) Mostre que um homomorfismo de (R,S)-bimódulos $\widehat{\ }\colon M \to N$, $m \mapsto \widehat{m}$, determina uma transformação natural entre os funtores $-\otimes_R M$, $-\otimes_R N\colon$ Mod-$R \to$ Mod-S .
(Note a importância de ser homomorfismo de (R,S)-bimódulos, não só de R-módulos).

(c) Seja $\mathcal{F}ree_R$ a subcategoria plena dos R-módulos à direita livres. Mostre que se M é livre como S-módulo, então a restrição de $-\otimes_R M$ induz um funtor $\mathcal{F}ree_R \to \mathcal{F}ree_S$.

(d) Seja $proj_R$ a subcategoria plena dos R-módulos à direita projetivos finitamente gerados. Mostre que se M for projetivo e finitamente gerado como S-módulo, então a restrição de $-\otimes_R M$ induz um funtor $proj_R \to proj_S$.

26.- Sejam k um corpo, R uma k-álgebra e $R^e := R\otimes_k R^{op}$. Sejam L e N R-módulos à esquerda. Seja M um (R,R)-bimódulo.

(a) Defina estruturas de R^e-módulo à esquerda em M e em $\mathrm{Hom}_k(L,N)$. (Não precisa provar, só explicitá-la).

(b) Defina um homomorfismo de k-módulos injetor

$$\mathrm{Hom}_R(M\otimes_R L, N) \to \mathrm{Hom}_{R^e}(M, \mathrm{Hom}_k(L,N)), \qquad f \mapsto \widehat{\ }^f$$

onde $\widehat{\ }^f\colon M \to \mathrm{Hom}_k(L,N)$, $x \mapsto \widehat{x}^f$.

(c) Prove que a definição que forneceu em (b) é de fato um homomorfismo injetor de k-módulos.
(Dica: Prove de maneira similar ao teorema do isomorfismo adjunto)

27.- Seja R um anel. Dizemos que um homomorfismo de R-módulos à direita $f\colon M \to N$ *fatoriza por um projetivo* se existirem um R-módulo projetivo à direita P e homomorfismos de R-módulos $\alpha\colon M \to P$ e $\beta\colon P \to N$ tais que $f = \beta\alpha$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & N \\ & P \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Para cada par de R-módulos à direita M e N, definimos o subconjunto $\mathcal{P}(M,N)$ de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ como

$$\mathcal{P}(M,N) = \big\{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)\colon f \text{ fatoriza por um projetivo}\big\}.$$

(a) Seja $f\colon M \to N$ um homomorfismo de R-módulos à direita que fatoriza por um projetivo, ou seja, $f \in \mathcal{P}(M,N)$. Se $\delta\colon Q \to N$ for um epimorfismo de R-módulos à direita com Q projetivo, mostre que existe um homomorfismo de R-módulos à direita $\gamma\colon M \to Q$ tal que $f = \delta\gamma$.

(b) Aplicando o funtor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ ao homomorfismo $\delta\colon Q \to N$ mostre (usando (a)):
Para cada par de R-módulos à direita M e N, $\mathcal{P}(M,N)$ é um subgrupo de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.

(c) Mostre que os seguintes dados definem uma categoria $\mathcal{C}$:

$$Obj\,\mathcal{C} = Obj \text{ Mod-}R, \qquad \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(M,N) = \frac{\mathrm{Hom}_R(M,N)}{\mathcal{P}(M,N)},$$

$$\mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(M,N) \times \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(L,M) \to \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(L,N),\ (\overline{\beta},\overline{\alpha}) \mapsto \overline{\beta\alpha},$$

onde L, M, N são R-módulos à direita e $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(L,M)$, $\beta \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

(d) Se R for da forma $R = M_n(D)$ onde D é um anel com divisão, como é a categoria $\mathcal{C}$ definida em (c)?

28.- Seja $f\colon R \to S$ um homomorfismo de anéis sobrejetor com $I = \ker f$.

(a) Seja M um R-módulo à direita. Considere o R-módulo M/MI. Para cada $m \in M$ denotamos por $\overline{m}$ a classe de m em M/MI.
Mostre que M/MI pode ser munido de uma estrutura de S-módulo à direita da seguinte forma:

$$\text{Para cada } m \in M,\ s \in S, \quad \overline{m}s := \overline{mr} \text{ onde } f(r) = s.$$

(b) Definimos o funtor $F\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S$ da seguinte forma:
   (i) Se M for um R-módulo à direita, definimos $F(M) := M/MI$.
   (ii) Se $\alpha\colon M \to N$ é um homomorfismo de R-módulos à direita, definimos $F(\alpha)\colon FM \to FN$, como $F(\alpha)(\overline{m}) := \overline{\alpha(m)}$, para todo $m \in M$.

Mostre que $F(\alpha)$ está bem definida e que F é, de fato, um funtor.

(c) Considere o funtor $G := - \otimes_R S\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S$. Mostre que os funtores F e G são naturalmente isomorfos (equivalentes).

29.- Seja $\mathcal{ORD}$ a categoria definida como segue:
- Os objetos de $\mathcal{ORD}$ são os conjuntos da forma $\{1,2,\ldots,n\}$, exatamente um conjunto para cada inteiro positivo n, *munidos da ordem usual.*
- Os morfismos $\alpha\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ são aplicações que *preservam a ordem*: se $i \leq j$, então $\alpha(i) \leq \alpha(j)$.

Seja $\mathcal{BF}ree_R$ a categoria definida como segue:
- Os objetos de $\mathcal{BF}ree_R$ são todos os pares (F,B) onde F é um R-módulo livre à direita com base $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, considerada como conjunto ordenado sob a ordem $f_i < f_j$ se $i < j$.
- Um morfismo $\alpha\colon (F,B) \to (F',B')$ é um homomorfismo de R-módulos $\alpha\colon F \to F'$ tal que $\alpha(B) \subseteq B'$ e a restrição $\alpha_{|B}\colon B \to B'$ é uma aplicação de B em B' que preserva a ordem.

Mostre que as categorias $\mathcal{ORD}$ e $\mathcal{BF}ree_R$ são naturalmente equivalentes.

30.- Seja R um anel. Dizemos que um R-módulo à direita M é *fielmente plano* se satisfaz as duas seguintes condições:

(i) M é um R-módulo plano,

(ii) para todo R-módulo à esquerda X, se $M \otimes_R X = 0$, então $X = 0$.

Mostre as seguintes afirmações:

(a) Todo R-módulo à direita livre não nulo é fielmente plano.

(b) $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo fielmente plano.

(c) Se M for um R-módulo à direita fielmente plano e N é um R-módulo à direita plano, então $M \oplus N$ é um R-módulo à direita fielmente plano.

(d) Suponha que M é um R-módulo à direita plano. Mostre que M é fielmente plano se, e somente se, $M \otimes_R R/I \neq 0$ para todo ideal à esquerda próprio I de R.