MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Lista 7

1.- Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Sejam A, B objetos de $\mathcal{C}$.
  (a) Mostre que o morfismo identidade 1_A é único.
  (b) Dizemos que um morfismo $f \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um *isomorfismo* se existir $g \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que $gf = 1_A$ e $fg = 1_B$. O morfismo g é chamado o *inverso* de f. Mostre que o inverso de um isomorfismo é único.
  (c) Moste que um isomorfismo é um epimorfismo e um monomorfismo.

2.- (a) Mostre que um morfismo em $\mathcal{S}ets$ é um monomorfismo se, e somente se, for injetor.
  (b) Mostre que um morfismo em $\mathcal{S}ets$ é um epimorfismo se, e somente se, for sobrejetor.
  (c) Mostre que para qualquer subcategoria $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}ets$, um morfismo sobrejetor é um epimorfismo. Como consequência obtenha que nas categorias Mod-R, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ings$, $\mathcal{T}op$, ... um morfismo sobrejetor é um epimorfismo.
  (d) Mostre que para qualquer subcategoria $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}ets$, um morfismo injetor é um monomorfismo. Como consequência obtenha que nas categorias Mod-R, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ings$, $\mathcal{T}op$, ... um morfismo injetor é um monomorfismo.

3.- Dizemos que um grupo abeliano D é *divisível* se, para cada $x \in D$ e cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x' \in D$ tal que $x = nx' = x' + \overset{(n}{\cdots} + x'$.
  (a) Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ são divisíveis.
  (b) Mostre que a imagem homomórfica de um grupo abeliano divisível é divisível.
  (c) Mostre que a subcategoria dos grupos divisíveis $\mathcal{DA}b$ é uma categoria plena de $\mathcal{A}b$.
  (d) Mostre que a projeção canônica $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um monomorfismo em $\mathcal{DA}b$ mas não é injetor.

4.- * Dadas um par de categorias à direita $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, podemos formar a *categoria produto* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ como segue. Os objetos de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ são pares (C, D), onde C é um objeto de $\mathcal{C}$ e D um objeto de $\mathcal{D}$. E um morfismo

$$(\gamma, \delta) \colon (C, D) \to (C'', D'')$$

em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um par de morfismos

$$\gamma \colon C \to C'', \quad \delta \colon D \to D'',$$

pertencentes a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ respectivamente.

A composição é dada pela regra

$$(\gamma, \delta)(\gamma', \delta') = (\gamma\gamma', \delta\delta'),$$

onde $(\gamma', \delta') \colon (C', D') \to (C, D)$. Mostre que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é uma categoria à direita, sendo $(1_C, 1_D)$ o morfismo identidade de um par (C, D).

Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ fossem categorias à esquerda, faça as mudanças nas definições anteriores para obter uma categoria à esquerda.

Se as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ fossem de diferentes quiralidades, mostre como deveríamos definir a composição (usando a categoria espelho), de forma que obtenhamos uma categoria à direita.

5.- * Sejam R e S anéis e $T = R \times S$. Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria de Mod-R e seja $\mathcal{D}$ uma subcategoria de Mod-S. Mostre que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é uma subcategoria de Mod-T. (Dica: um objeto (C, D) de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ pode ser considerado como um T-módulo $(c, d)(r, s) = (cr, ds)$).

6.- Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ categorias. Sejam $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores.

(a) Mostre que F é contravariante (covariante) se, e somente se, $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{op} \mathcal{D}^{op}$ é covariante (contravariante).

(b) Definimos $F^{op}\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ como $F^{op}(C) = F(C^{op})$ para todo $C \in \mathcal{C}$, e $F^{op}(f^{op}) = F(f)$ para todo morfismo f em $\mathcal{C}$. Mostre que F^{op} é covariante (contravariante) se, e somente se, F é contravariante (covariante).

(c) Mostre que se F, G são ambos covariantes (contravariantes) então GF é covariante.

(d) Mostre que se F é covariante (contravariante) e G contravariante (covariante) então GF é contravariante.

7.- Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $A, B, C \in \mathcal{C}$. Sejam $f \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(B, C)$. Mostre que

(a) Se f, g são monomorfismos, então gf é monomorfismo.

(b) Se f, g são epimorfismos, então gf é epimorfismo.

(c) Se gf é monomorfismo, então f é monomorfismo.

(d) Se gf é epimorfismo, então g é epimorfismo.

(e) Se f for um isomorfismo, então f é um monomorfismo e um epimorfismo.

8.- Seja R um anel sem unidade, ou seja, um objeto da categoria $\mathcal{R}ngs$. Definimos a *unitização* de R como $U(R) = \{(r, a)\colon r \in R,\ a \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Mostre que $U(R)$ é um anel com a soma e produto dados por

$$(r, a) + (s, b) = (r + s, a + b), \quad (r, a)(s, b) = (rs + br + as, ab),$$

e que a unidade de $U(R)$ é $(0, 1)$.

(b) Mostre que se $f\colon R \to S$ é um morfismo de $\mathcal{R}ngs$, então $U(f)\colon U(R) \to U(S)$, $U(f)(r, a) = (f(r), a)$ é um homomorfismo de anéis.

(c) Mostre que existe uma transformação natural entre os funtores $1_{\mathcal{R}ngs}$ e $U\colon \mathcal{R}ngs \to \mathcal{R}ngs$.

9.- Seja n um inteiro positivo. Considere a categoria $\mathcal{R}ings$ e os funtores $F, G_n\colon \mathcal{R}ings \to \mathcal{R}ings$ onde F envia cada anel R em seu anel oposto e G_n envia cada anel R em $M_n(R)$. Mostre que a transposição de matrizes define um isomorfismo natural entre os funtores G_nF e FG_n.

10.- Seja R um anel. Para cada inteiro positivo, definimos o funtor $GL_n\colon \mathcal{R}ings \to \mathcal{G}roups$ como segue. Para cada anel R, $GL_n(R)$ denota o grupo das matrizes invertíveis do anel de matrizes $M_n(R)$. Para cada homomorfismo de anéis $f\colon R \to S$, denotamos por $GL_n(f)\colon GL_n(R) \to GL_n(S)$ o homomorfismo de grupos obtido pela restrição do homomorfismo de anéis induzido $M_n(R) \to M_n(S)$ por f.

Mostre que para cada inteiro positivo, a aplicação $\iota_n\colon GL_n(R) \to GL_{n+1}(R)$ dada por

$$A \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

define uma transformação natural entre os funtores GL_n e GL_{n+1}.

11.- (a) * Mostre que os funtores $1_{\text{Mod-}R}$, $\mathrm{Hom}_R(R, -)\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}R$ são naturalmente equivalentes.

(b) Mostre também que os funtores $1_{R\text{-Mod}}$, $\mathrm{Hom}_R(R, -)\colon R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ são naturalmente equivalentes. (Dica: Note que é importante considerar os morfismos à direita!)

12.- * Sejam R e S dois anéis. Definimos T como o anel $T = R \times S$. Mostre que as categorias Mod-T e Mod-$R \times$ Mod-S são naturalmente equivalentes. (Dica: Defina $F\colon$ Mod-$R \times$ Mod-$S \to$ Mod-T como o funtor dado no exercício 5. Suponha agora que N é um T-módulo. Considere $e_R = (1,0), e_S = (0,1)$. Mostre que $Te_R \cong R$ e $Te_S \cong S$ como anéis. Isso induz uma estrutura de R-módulo em Ne_R e de S-módulo em Ne_S. Definimos então $G(N) = Ne_R \times Ne_S$).

13.- Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Sejam $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $F', G'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores.

(a) Suponha que F, G, F', G' sejam todos covariantes e que $\eta\colon F \to G$ e $\eta'\colon F' \to G'$ são transformações naturais. Mostre que existe uma transformação natural $F'F \to G'G$.

(b) Suponha que F, G, F', G' sejam todos contravariantes e que $\eta\colon G \to F$ e $\eta'\colon F' \to G'$ são transformações naturais. Mostre que existe uma transformação natural $F'F \to G'G$.

(c) Se $\eta\colon F \to G$ é um isomorfismo natural, defina $\sigma_C\colon GC \to FC$ para todo $C \in \mathcal{C}$, como $\sigma_C = \eta_C^{-1}$. Mostre que σ é uma transformação natural $G \to F$.

14.- * Sejam R e S anéis. Sejam ${}_RM_S$, ${}_RN_S$ (R,S) bimódulos.

(a) Mostre que $- \otimes_R M$ define um funtor Mod-$R \to$ Mod-S

(b) Mostre que um homomorfismo de (R,S)-bimódulos $\widehat{\ }\colon M \to N$, $m \mapsto \widehat{m}$, determina uma transformação natural entre $- \otimes_R M$ e $- \otimes_R N$. (Note a importância de ser homomorfismo de (R,S)-bimódulos, não só de R-módulos).

(c) Seja mod-R a subcategoria plena dos R-módulos à direita finitamente gerados. Mostre que se M é finitamente gerado como S-módulo então ${}_RM_S$ induz um funtor mod-$R \to$ mod-S.

(d) Seja $\mathcal{F}lat_R$ a subcategoria plena dos R-módulos à direita planos. Mostre que se M é plano como S-módulo, então a restrição de $- \otimes_R M$ induz um funtor $\mathcal{F}lat_R \to \mathcal{F}lat_S$.

15.- *

(a) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, e seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$. Um *coproduto* da família anterior é um par ordenado $(C, \{\eta_i\}_{i\in I})$, onde C é um objeto de $\mathcal{C}$ e $\eta_i \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(A_i, C)$, verificando a seguinte propriedade universal: se para um objeto X de $\mathcal{C}$ existem morfismos $\gamma_i \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(A_i, X)$ para cada $i \in I$, então existe um único morfismo $\theta\colon C \to X$ tal que $\theta\eta_i = \gamma_i$ para todo $i \in I$. Mostre de duas formas que o coproduto, quando existir, é único a menos de isomorfismo (como em módulos e provando que é objeto inicial em certa categoria).

(b) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, e seja $\{A_i\}_{i\in I}$ uma família de objetos de $\mathcal{C}$. Um *produto* da família anterior, é um par ordenado $(P, \{\pi_i\}_{i\in I})$, onde P é um objeto de $\mathcal{C}$ e $\pi_i \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(P, A_i)$ verificando a seguinte propriedade universal: se para um objeto X de $\mathcal{C}$ existem morfismos $\delta_i \in \mathcal{M}or_{\mathcal{C}}(X, A_i)$ para cada $i \in I$, então existe um único morfismo $\phi\colon X \to P$ tal que $\pi_i\phi = \delta_i$ para todo $i \in I$. Mostre que o produto, quando existir, é único a menos de isomorfismo.

16.- *

(a) Mostre que o coproduto na categoria de módulos é a soma direta (junto com as inclusões canônicas), e portanto, existe para qualquer família de módulos.

(b) Mostre que o produto na categoria de módulos é produto direto (junto com as projeções canônicas), e portanto existe para qualquer família de módulos.

(c) Mostre que os conceitos de produto e coproduto são duais.

(d) Mostre que na categoria dos conjuntos $\mathcal{S}ets$ o coproduto coincide com a união disjunta e o produto com o produto cartesiano.

(e) Na categoria $\mathcal{C}om\mathcal{R}ings$, encontre o coproduto de um conjunto finito de anéis comutativos.

17.- * Defina pushout e pullback em uma categoria qualquer. Prove que esses objetos, quando existirem são únicos a menos de isomorfismo.

18.- * Defina limite direto e limite inverso em uma categoria qualquer. Prove que esses objetos, quando existirem, são únicos a menos de isomorfismo.