MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Lista 6

1.- (a) Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de grupos abelianos isomorfos a um grupo abeliano A. Considere os sistemas inversos $((A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\varphi_n^m\colon A_n \to A_m)_{m\le n})$, $((A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\psi_n^m\colon A_n \to A_m)_{m\le n})$ onde cada $\psi_n^m = 0$ e cada φ_n^m é um isomorfismo. Mostre que o limite inverso do primeiro sistema inverso é isomorfo a A e o limite inverso do segundo sistema inverso é zero.

(b) Mostre um exemplo de dois sistemas diretos de grupos abelianos tendo os mesmos grupos abelianos e cujos limites diretos não sejam isomorfos.

(c) Mostre um exemplo de um sistema direto de R-módulos à direita $\Big((A_i)_{i\in I}, (\varphi_i^j\colon A_i \to A_j)_{i\le j}\Big)$ tal que $A_i \neq 0$ para todo i e $\varphi_i^j \neq 0$ para todos $i \le j$, mas $\varinjlim A_i = 0$.

2.- * Seja $(I,\le)$ um conjunto parcialmente ordenado e dirigido. Seja $K \subseteq I$, dizemos que K é um subconjunto *cofinal* de I se para cada $i \in I$ existe $k \in K$ tal que $i \le k$. Dizemos que I tem um *último elemento* se existir $\infty \in I$ tal que $i \le \infty$ para todo $i \in I$.

Sejam $(I,\le)$ um conjunto parcialmente ordenado e dirigido e $K \subseteq I$ um subconjunto *cofinal* de I.

(a) Seja $\Big((M_i)_{i\in I}, (\varphi_i^j\colon M_i \to M_j)_{i\le j}\Big)$ um sistema direto de R-módulos à direita e considere $\big((M_k)_{k\in K}, (\varphi_k^l\colon M_k \to M_l)_{k\le l}\big)$. Mostre que $\varinjlim_{i\in I} M_i$ é isomorfo a $\varinjlim_{k\in K} M_k$.

(b) Seja $\big((M_i)_{i\in I}, (\varphi_j^i\colon M_j \to M_i)_{i\le j}\big)$ um sistema inverso de R-módulos à direita e considere $\big((M_k)_{k\in K}, (\varphi_l^k\colon M_l \to M_k)_{k\le l}\big)$. Mostre que $\varprojlim_{i\in I} M_i$ é isomorfo a $\varprojlim_{k\in K} M_k$.

(c) Suponha que $(I,\le)$ tem um último elemento ∞. Mostre que $\varinjlim M_i \cong M_\infty$.

(d) Mostre que (a) e (b) não são necessariamente verdadeiras se o conjunto de índices não é dirigido. (*Dica:* pushout e pullback).

3.- * Seja $(I,\le)$ um conjunto parcialmente ordenado. Sejam

$$\Big((A_i)_{i\in I}, (\varphi_i^j\colon A_i \to A_j)_{i\le j}\Big), \quad \Big((B_i)_{i\in I}, (\psi_i^j\colon B_i \to B_j)_{i\le j}\Big), \quad \Big((C_i)_{i\in I}, (\phi_i^j\colon C_i \to C_j)_{i\le j}\Big)$$

sistemas diretos de R-módulos à direita. Suponha dados os morfismos de sistemas diretos

$$r\colon (A_i, (\varphi_i^j)_{i\le j}) \to (B_i, (\psi_i^j)_{i\le j}), \quad s\colon (B_i, (\psi_i^j)_{i\le j}) \to (C_i, (\phi_i^j)_{i\le j}).$$

(a) Se $A_i \xrightarrow{r_i} B_i \xrightarrow{s_i} C_i \to 0$ é exata para cada $i \in I$, mostre que $\varinjlim A_i \xrightarrow{\vec{r}} \varinjlim B_i \xrightarrow{\vec{s}} \varinjlim C_i \to 0$ é exata, onde $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são os homomorfismos induzidos por r e s respectivamente.

(b) Se $(I,\le)$ for dirigido e $0 \to A_i \xrightarrow{r_i} B_i \xrightarrow{s_i} C_i \to 0$ é exata para cada $i \in I$, mostre que $0 \to \varinjlim A_i \xrightarrow{\vec{r}} \varinjlim B_i \xrightarrow{\vec{s}} \varinjlim C_i \to 0$ é exata, onde $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são os homomorfismos induzidos por r e s respectivamente.

4.- Seja $0 \to U \to V \to V/U \to 0$ uma sequência exata de R-módulos à direita.

(a) Seja $(I,\le$ um conjunto parcialmente ordenado. Seja $\Big((U_i)_{i\in I}, (\varphi_i^j\colon U_i \to U_j)_{i\le j}\Big)$ um sistema direto de R-submódulos de U onde cada φ_i^j é uma inclusão. Para cada $i,j \in I$ com $i \le j$ defina $\phi_i^j\colon V/U_i \to V/U_j$, $v + U_i \mapsto v + U_j$, é o homomorfismo natural. Mostre que $\Big((V/U_i)_{i\in I}, (\phi_i^j)_{i\le j}\Big)$ é um sistema direto.

(b) Se $\varinjlim U_i = U$, mostre que $\varinjlim (V/U_i) \cong V/U$.

5.- * Seja $(I,\leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e dirigido. Seja $\Big((M_i)_{i\in I},(\varphi_i^j\colon M_i\to M_j)_{i\leq j}\Big)$ um sistema direto de R-módulos à direita. Considere o limite direto $\Big(\varinjlim M_i,(\alpha_i\colon M_i\to \varinjlim M_i)_{i\in I}\Big)$. Suponha que existem $x_i\in M_i$ e $x_j\in M_j$ tais que $\alpha_i(x_i)=\alpha_j(x_j)$. Mostre que existe $k\in I$, $i,j\leq k$ tal que $\varphi_i^k(x_i)=\varphi_j^k(x_k)$.

6.- * Seja $(I,\leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Sejam

$$\big((A_i)_{i\in I},(\varphi_j^i\colon A_j\to A_i)_{i\leq j}\big),\quad \big((B_i)_{i\in I},(\psi_j^i\colon B_j\to B_i)_{i\leq j}\big),\quad \big((C_i)_{i\in I},(\phi_j^i\colon C_j\to C_i)_{i\leq j}\big)$$

sistemas diretos de R-módulos à direita. Suponha dados os morfismos de sistemas inversos

$$r\colon (A_i,(\varphi_j^i)_{i\leq j})\to (B_i,(\psi_j^i)_{i\leq j}),\quad s\colon (B_i,(\psi_j^i)_{i\leq j})\to (C_i,(\phi_j^i)_{i\leq j}).$$

Se $0\to A_i\xrightarrow{r_i} B_i\xrightarrow{s_i} C_i$ é exata para cada $i\in I$, mostre que $0\to \varprojlim A_i\xrightarrow{\overleftarrow{r}}\varprojlim B_i\xrightarrow{\overleftarrow{s}}\varprojlim C_i$ é exata, onde $\overleftarrow{r}$ e $\overleftarrow{s}$ são os homomorfismos induzidos por r e s respectivamente.

7.- * Seja $(I,\leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Seja $\big((M_i)_{i\in I},(\psi_j^i\colon M_j\to M_i)_{i\leq j}\big)$ um sistema inverso de R-módulos à direita, mostre que, para cada R-módulo à direita X, $\operatorname{Hom}_R(X,\varprojlim M_i)$ e $\varprojlim \operatorname{Hom}_R(X,M_i)$ são isomorfos.

8.- * Seja $(I,\leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Seja $\Big((M_i)_{i\in I},(\varphi_i^j\colon M_i\to M_j)_{i\leq j}\Big)$ um sistema direto de R-módulos à direita, mostre que, para cada R-módulo à direita Y, $\operatorname{Hom}_R(\varinjlim M_i,Y)$ e $\varprojlim \operatorname{Hom}_R(M_i,Y)$ são isomorfos.

9.- (a) Seja K um corpo e V um K-espaço vetorial com base $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $V_n=\bigoplus_{i\geq n} v_iK$. Nota que $V_{n+1}\hookrightarrow V_n$ via $v_i\mapsto v_i$. Mostra que $\varprojlim V_n=0$.

(b) Considere agora, para cada $n\in\mathbb{N}$, as sequência exata curta $0\to V_n\to V\to V/V_n\to 0$. Mostre que o limite inverso dessas sequências não é uma sequência exata curta.

10.- Seja $(I,\leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e dirigido. Seja $((A_i)_{i\in I},(\varphi_i^j\colon A_i\to A_j)_{i\leq j})$ um sistema direto de R-módulos à direita.

(a) Mostre que se cada φ_i^j for um homomorfismo injetor, então o homomorfimo $\alpha_i\colon A_i\to\varinjlim A_i$, onde $(\varinjlim A_i,(\alpha_i\colon A_i\to\varinjlim A_i)_{i\in I})$ é o limite, é injetor.

(b) Mostre que se cada φ_i^j for um homomorfismo sobrejetor, onde $(\varinjlim A_i,(\alpha_i\colon A_i\to\varinjlim A_i)_{i\in I})$ é o limite, então o homomorfimo $\alpha_i\colon A_i\to\varinjlim A_i$ é sobrejetor.

11.- Sejam $(I,\leq)$, $(J,\preceq)$ dois conjuntos parcialmente ordenados. Uma função $\gamma\colon I\to J$ é um *morfismo de conjuntos parcialmente ordenados* se $\gamma(i_1)\preceq F(i_2)$ para todos $i_1\leq i_2$ elementos de I.

(a) Sejam $((A_i)_{i\in I},(\varphi_{i_1}^{i_2}\colon A_{i_1}\to A_{i_2})_{i_1\leq i_2})$ e $((B_j)_{j\in J},(\psi_{j_1}^{j_2}\colon A_{j_1}\to A_{j_2})_{j_1\leq j_2})$ dois sistemas diretos de R-módulos à direita. Suponha que existe uma família de homomorfismos $\Gamma=(\Gamma_i\colon A_i\to B_{\gamma(i)})$ tal que $\psi_{\gamma(i_1)}^{\gamma(i_2)}\Gamma_{i_1}=\Gamma_{i_2}\varphi_{i_1}^{i_2}$ para todos $i_1\leq i_2$ elementos de I. Mostre que Γ induz um homomorfismo de R-módulos $\vec{\Gamma}\colon \varinjlim A_i\to\varinjlim B_j$.

(b) Sejam $((A_i)_{i\in I},(\varphi_{i_2}^{i_1}\colon A_{i_2}\to A_{i_1})_{i_1\leq i_2})$ e $((B_j)_{j\in J},(\psi_{j_2}^{j_1}\colon A_{j_2}\to A_{j_1})_{j_1\preceq j_2})$ dois sistemas inversos de R-módulos à direita. Suponha que existe uma família de homomorfismos $\Gamma=(\Gamma_i\colon A_i\to B_{\gamma(i)})$ tal que $\psi_{\gamma(i_2)}^{\gamma(i_1)}\Gamma_{i_2}=\Gamma_{i_1}\varphi_{i_2}^{i_1}$ para todos $i_1\leq i_2$ elementos de I. Mostre que Γ induz um homomorfismo de R-módulos R-módulos $\overleftarrow{\Gamma}\colon \varprojlim A_i\to\varprojlim B_j$.

12.- * Sejam R um anel e $S \subseteq R$ tal que satisfaz as seguintes afirmações (a) $1 \in S$, $0 \notin S$; (b) $SS \subseteq S$; (c) $S \subseteq Z(R)$; (d) Se existirem $r \in R$ e $s \in S$ tais que $rs = 0$, então $r = 0$.

Definimos em S um relação de equivalência:

$$s \sim t \iff s = ut \text{ para algum elemento invertível } u \in R.$$

Seja $I = S/\sim$ o conjunto das classes de equivalência. Definimos em I a seguinte ordem parcial $i = [s] \leq j = [t]$ se existir $r \in R$ tal que $t = sr$.

(a) Mostre que I é um conjunto dirigido.

(b) Mostre que $i \leq j$ se, e somente se, $\frac{1}{s}R \subseteq \frac{1}{t}R$ em RS^{-1}.

(c) Mostre que se $[s] = [t]$ se, e somente se, $\frac{1}{t}R = \frac{1}{s}R$ em RS^{-1}.

(d) Expresse RS^{-1} como um limite direto de módulos cíclicos livres da forma $\varinjlim_{i \in I} M_i$.

(e) Mostre que se a sequência de R-módulos à esquerda $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ for exata, então a sequência de grupos abelianos

$$0 \to RS^{-1} \otimes_R A \xrightarrow{1\otimes\alpha} RS^{-1} \otimes_R B \xrightarrow{1\otimes\beta} RS^{-1} \otimes_R C \to 0$$

é exata.

13.- Sejam Λ e Ω dois conjuntos parcialmente ordenados. Considere o conjunto $\Delta = \Lambda \times \Omega$. O conjunto Δ pode ser pode ser munido de duas estruturas de conjunto parcialmente ordenado de forma que as projeções $\Delta \to \Lambda$ e $\Delta \to \Omega$ sejam morfismos de conjuntos parcialmente ordenados (ordens lexicográficas).

Suponha que $(M_{(\lambda,\omega)}, (\varphi_{(\lambda,\omega)}^{(\lambda',\omega')} \colon M_{(\lambda,\omega)} \to M_{(\lambda',\omega')})_{(\lambda,\omega)\leq(\lambda',\omega')})$ é um sistema direto de R-módulos à direita. Fixado $\lambda_0 \in \Lambda$, $((M_{(\lambda_0,\omega)})_{\omega\in\Omega}, (\varphi_{(\lambda_0,\omega)}^{(\lambda_0,\omega')})_{\omega\leq\omega'})$ é um sistema direto indizado em Ω. Da mesma forma, fixado $\omega_0 \in \Omega$, $((M_{(\lambda,\omega_0)})_{\lambda\in\Lambda}, (\varphi_{(\lambda,\omega_0)}^{(\lambda',\omega_0)})_{\lambda\leq\lambda'})$ é um sistema direto indizado em Λ. Mostre que temos três formas de calcular o limite direto indizado em Δ

$$\varinjlim_{\Lambda} \varinjlim_{\Omega} M_{(\lambda,\omega)} = \varinjlim_{\Omega} \varinjlim_{\Lambda} M_{(\lambda,\omega)} = \varinjlim_{\Delta} M_{(\lambda,\omega)}$$

14.- Seja R um anel e s um elemento do centro de R. Seja M um R-módulo à direita. Considere $\phi_s \colon M \to M$, $m \mapsto ms$ e o sistema direto

$$M_0 \xrightarrow{\phi_s} M_1 \xrightarrow{\phi_s} M_2 \xrightarrow{\phi_s} M_3 \xrightarrow{\phi_s} \cdots,$$

onde $M_i = M$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre ϕ_s é um homomorfismo de R-módulos.

(b) Considere o limite $(\varinjlim M_i, (\alpha_i \colon M_i \to \varinjlim M_i)_{i\in I})$. Mostre que se $x \in M_i$ e $\alpha_i(x_i) = 0$, então existe $n \geq 1$ tal que $xs^n = 0$.

(c) Mostre que se $x \in \varinjlim M_i$ e existe um natural n tal que $xs^n = 0$, então $x = 0$.

(d) Mostre que $\Phi_s \colon \varinjlim M_i \to \varinjlim M_i$, $x \mapsto xs$, é um isomorfismo.

(e) Suponha que, para todo $r \in R$, $rs = 0$ implica que $r = 0$. Mostre que $\varinjlim M_i$ é um RS^{-1}-módulo onde $S = \{1, s, s^2, \ldots\}$.

(f) Mostre que $MS^{-1} \cong \varinjlim M_i$.

15.- Seja R um anel e M um R-módulo à direita. Seja $f \colon M \to M$ um homomorfismo de R-módulos. Considere o sistema direto de R-módulos

$$M_0 \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{f} M_3 \xrightarrow{f} M_4 \xrightarrow{f} \cdots$$

onde $M_i = M$. Considere o limite $(\varinjlim M_i, (\alpha_i \colon M_i \to \varinjlim M_i)_{i\in I})$

(a) Seja $x_i \in M_i$. Mostre que $\alpha_i(x_i) = 0$ se, e somente se, existir um natural n tal que $f^n(x_i) = 0$.

(b) Mostre que podemos estender f a um isomorfismo $F \colon \varinjlim M_i \to \varinjlim M_i$, $x = \alpha_i(x_i) \mapsto F(x) = \alpha_i(f(x))$.

16.- * Seja R um anel. Sejam A, B, C R-módulos à direita e $\alpha\colon A \to B$, $\beta\colon B \to C$ homomorfismos de R-módulos. Mostre que a sequência de R-módulos

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C,$$

é exata se, e somente se, a sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(L,\alpha)} \mathrm{Hom}_R(L, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(L,\beta)} \mathrm{Hom}_R(L, C)$$

for exata para todo R-módulo à direita L.

17.- * Seja R um anel. Sejam A, B, C R-módulos à direita e $\alpha\colon A \to B$, $\beta\colon B \to C$ homomorfismos de R-módulos. Mostre que a sequência de R-módulos

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0,$$

é exata se, e somente se, a sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, P) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta,P)} \mathrm{Hom}_R(B, P) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha,P)} \mathrm{Hom}_R(A, P)$$

é exata para todo R-módulo à direita P.

18.- * Seja R um anel. Sejam A, B, C R-módulos à direita e $\alpha\colon A \to B$, $\beta\colon B \to C$ homomorfismos de R-módulos. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) A sequência de R-módulos

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0,$$

é exata e cinde.

(b) A sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(L,\alpha)} \mathrm{Hom}_R(L, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(L,\beta)} \mathrm{Hom}_R(L, C) \longrightarrow 0$$

é exata e cinde para todo R-módulo à direita L.

(c) A sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(L,\alpha)} \mathrm{Hom}_R(L, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(L,\beta)} \mathrm{Hom}_R(L, C) \longrightarrow 0$$

é exata para todo R-módulo à direita L.

(d) A sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, P) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta,P)} \mathrm{Hom}_R(B, P) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha,P)} \mathrm{Hom}_R(A, P) \longrightarrow 0$$

é exata e cinde para todo R-módulo à direita P.

(e) A sequência de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, P) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta,P)} \mathrm{Hom}_R(B, P) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha,P)} \mathrm{Hom}_R(A, P) \longrightarrow 0$$

é exata para todo R-módulo à direita P.

(Dica: prove $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$. Para provar $(c) \Rightarrow (a)$ faça $L = C$).