MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Lista 5

1.- Sejam R e S um anéis, e M_R um R-módulo à direita e seja $E = \mathrm{End}_R(M_R)$

(a) Mostre que são equivalentes

(i) M_R é um S-R-bimódulo.

(ii) Existe um homomofismo de anéis $S \to E$.

(b) Mostre que existe um homomorfismo de anéis $R \to \mathrm{End}_E({}_E M)$ cujo núcleo é o anulador $\mathrm{ann}(M)$.

(c) Qual o anulador de M como E-módulo à esquerda?

2.- Seja R um anel e considere sua estrutura natural de (R, R)-bimódulo. Mostre que os (R,R)-bimódulos contidos em R (com respeito ao produto e soma herdados) são os ideais de R.

3.- (a) Seja R um anel e M_R um R-módulo à direita. Definimos o *dual* M^* de M como $M^* = \mathrm{Hom}_R(M_R, R_R)$. Mostre que M^* tem estrutura de $(R, \mathrm{End}_R(M))$-bimódulo e de $(R, \mathbb{Z})$-bimódulo.

(b) Seja k um corpo e V um k-espaço vetorial. Considere V como um $(k$-$k)$-módulo e k como um (k, k)-módulo da forma usual. Mostre que a estrutura de k-k-módulo de V^* obtida em teoria coincide com a estrutura de k-espaço vetorial que voçê já conhecia de álgebra linear.

(c) Seja k um corpo, V e W k-espaços vetoriais. Considere V e W como $(k$-$k)$-módulos. Mostre que a estrutura de k-k-módulo de $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ obtida em teoria coincide com a estrutura de k-espaço vetorial que voçê já conhecia de álgebra linear.

4.- Sejam R um anel e M_R, N_R R-módulos à direita. Considere os anéis $B = \mathrm{End}_R(M_R)$ e $A = \mathrm{End}_R(N_R)$. Mostre que $\mathrm{Hom}_R(M_R, N_R)$ tem estrutura de (A, B)-bimódulo. Mostre um resultado semelhante se M e N forem R-módulos à esquerda.

5.- Seja M um (R, R)-bimódulo e seja $S = R \oplus M$. Mostre que as operações

$$(r, x) + (r', x') = (r + r', x + x'), \quad (r, x)(r, x') = (rr', rx' + xr'), \qquad \forall r, r' \in R,\ x, x' \in M,$$

fazem de S um anel com $1_S = (1, 0)$. Mostre também que contém o subanel de elementos da forma $(r, 0)$ e o ideal de elementos da forma $(0, x)$. Se identificamos esses elementos com R e M respectivamente, então $S = R \oplus M$ e $M^2 = 0$.

6.- Seja R um anel e seja ${}_R M_R$ um (R, R)-bimódulo. Dizemos que uma função $\delta\colon R \to M$ é uma *derivação* se, para todo $a, b \in R$,

$$\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b), \qquad \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b).$$

Considere o anel S construído no exercício 5. Mostre que uma função $\delta\colon R \to M$ é uma derivação se, e somente se, a função $R \to S$, $a \mapsto (a, \delta(a))$ é um homomorfismo de anéis.

7.- * Sejam R um anel, M_R um R-módulo à direita e ${}_R N$ um R-módulo à esquerda. Seja R^{op} o anel oposto de R. Lembre que se M é um R^{op}-módulo à esquerda e N é um R^{op}-módulo à direita. Seja $\tau\colon M \otimes_R N \to N \otimes_{R^{op}} M$, definido por $\tau(m \otimes n) = n \otimes m$.

(a) Mostre que τ é um isomorfismo de grupos abelianos.

(b) Mostre que se R for um anel comutativo, então τ é um isomorfismo de R-módulos.

(c) Sejam $f\colon M \to M'$ e $g\colon N \to N'$ homomorfismos de R-módulos, e considere $\tau'\colon M' \otimes_R N' \to N' \otimes_{R^{op}} M'$, definido por $\tau(m' \otimes n') = n' \otimes m'$. Mostre que f e g são homomorfismos de R^{op}-módulos e que $\tau'(f \otimes g) = (g \otimes f)\tau$.

8.- * Seja R um anel, I um ideal à direita de R e ${}_RM$ um R-módulo à direita.

(a) Mostre que $IM = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_i \in I,\ x_i \in M,\ n \geq 0\}$ é um subgrupo (abeliano) de M. Se R for um ideal, IM é um R-submódulo de M.

(b) Mostre que existe um isomorfismo de grupos abelianos

$$f\colon \frac{R}{I} \otimes_R M \to \frac{M}{IM}$$

tal que $f((a+I)\otimes x) = ax + IM$. Se I um ideal, de R-módulos à esquerda.

(c) Se J for um ideal à esquerda de R, mostre que $R/I \otimes_R R/J$ é isomorfo como grupo abeliano ao grupo $R/(I+J)$. Se I e J forem ideais, mostre que o isomorfismo é de R-bimódulos.

(d) Sejam m, n inteiros ≥ 1 e $d = \mathrm{mdc}(m,n)$. Mostre que o grupo abeliano $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

(e) Seja K um corpo e consideremos o anel de polinômios $K[x]$. Sejam $m(x), n(x)$ dois polinômios em $K[x]$, e $d(x) = \mathrm{mdc}(m(x), n(x))$. Mostre que o grupo abeliano

$$\frac{K[x]}{m(x)K[x]} \otimes_{K[x]} \frac{K[x]}{n(x)K[x]}$$

é isomorfo a $K[x]/d(x)K[x]$.

9.- *(a) Sejam A e B dois grupos abelianos finitamente gerados. Calcule $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$. (Dica: exercício 8(d) e o seguinte fato conhecido: Se M é um grupo abeliano finitamente gerado então

$$M \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/p_1^{s_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2^{s_2}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_t^{s_t}\mathbb{Z},$$

onde $r \geq 0$ é um inteiro, $p_1, \ldots, p_t$ são números primos positivos (não necessariamente diferentes), e $s_1, \ldots, s_t$ são inteiros ≥ 1.)

(b) Seja A um grupo abeliano finitamente gerado. Calcule $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

(c) Seja A um grupo abeliano finitamente gerado. Calcule $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(d) Mostre que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$.

(e) Sejam A e B dois $F[x]$-módulos finitamente gerados. Calcule $A \otimes_{F[x]} B$. (Dica: exercício 8(e) e o seguinte fato conhecido: Se M é um $F[x]$-módulo finitamente gerado então

$$M \cong F[x]^r \oplus F[x]/p_1(x)^{s_1}F[x] \oplus \cdots \oplus F[x]/p_t(x)^{s_t}F[x],$$

onde $r \geq 0$ é um inteiro, $p_1, \ldots, p_t$ são polinômios mónicos irredutíveis (não necessariamente diferentes), e $s_1, \ldots, s_t$ são inteiros ≥ 1.)

10.- * Seja F um corpo e K um corpo contendo F. Suponha que V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre F e seja $T \in \mathrm{End}_F(V)$. Se $\mathcal{B} = \{v_i\}$ é uma base de V, então $\mathcal{C} = \{1 \otimes v_i : v_i \in \mathcal{B}\}$ é uma base de $K \otimes_F V$. Mostre que a matriz de T na base $\mathcal{B}$ é a mesma que a matriz de $1 \otimes T \in \mathrm{End}_K(K \otimes_F V)$ na base $\mathcal{C}$.

11.- * Seja R um anel comutativo e sejam M e N R-módulos livre com bases $\mathcal{B} = \{u_i\}_{i=1}^m$ e $\mathcal{C} = \{v_j\}_{j=1}^n$, respectivamente.

(a) Mostre que $M \otimes_R N$ é um R-módulo livre com base

$$\mathcal{D} = \{u_1 \otimes v_1, \ldots, u_1 \otimes v_n, u_2 \otimes v_1, \ldots u_2 \otimes v_n, \ldots, u_m \otimes v_1, \ldots, u_m \otimes v_n\}.$$

(b) Sejam M' e N' R-módulos livres com bases $\mathcal{B}' = \{u'_i\}_{i=1}^p$ e $\mathcal{C}' = \{v'_j\}_{j=1}^q$, respectivamente. E seja

$$\mathcal{D}' = \{u'_1 \otimes v'_1, \ldots, u'_1 \otimes v'_q, u'_2 \otimes v'_1, \ldots u'_2 \otimes v'_q, \ldots, u'_p \otimes v'_1, \ldots, u'_p \otimes v'_q\},$$

a respectiva base de $M' \otimes_R N'$. Sejam $f\colon M \to M'$ e $g\colon N \to N'$ homomorfismos de R-módulos com matrizes $A = [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (a_{pi})$ (a coluna i são as coordenadas de $f(u_i)$) e $B = [g]_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} = (b_{qj})$ respectivamente. Calcule a matriz de $f \otimes g$, mais concretamente mostre que

$$[f \otimes g]_{\mathcal{D}\mathcal{D}'} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1}B & a_{q2}B & \cdots & a_{qn}B \end{pmatrix}.$$

12.- * Sejam R um anel e $S \subseteq R$ tal que satisfaz as seguintes afirmações (a) $1 \in S$, $0 \notin S$; (b) $SS \subseteq S$; (c) $S \subseteq Z(R)$; (d) Se existirem $r \in R$ e $s \in S$ tais que $rs = 0$, então $r = 0$. Seja M um R-módulo à direita.

(i) Mostre que MS^{-1} é isomorfo a $M \otimes_R RS^{-1}$ como RS^{-1}-módulos à direita.

(ii) Mostre que o homomorfismo de R-módulos $M \to M \otimes_R RS^{-1}$, $m \mapsto m \otimes 1$, tem kernel $\{m \in M \colon ms = 0 \text{ para algum } s \in S\ \}$.

(iii) Suponha que $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ é uma sequência exata de R-módulos à direita. Mostre que a sequência de RS^{-1}-módulos $0 \to M \otimes_R RS^{-1} \xrightarrow{f \otimes 1} N \otimes_R RS^{-1} \xrightarrow{g \otimes 1} P \otimes_R RS^{-1} \to 0$ é exata.

13.- * Seja M um grupo abeliano.

(a) Seja $\phi \colon M \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $x \mapsto x \otimes 1$. Mostre que $\ker \phi = \mathcal{T}(M)$, o subgrupo de torção de M. (*Dica:* exercício 12)

(b) Seja p um número primo e $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = \{\frac{a}{p^n} : a, n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1\}$. Seja $\phi_p \colon M \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, $x \mapsto x \otimes 1$. Mostre que $\ker \phi_p = \{x \in M \colon xp^n = 0 \text{ para algum inteiro } n \geq 1\}$. (*Dica:* exercício 13)

14.- * Seja p um número primo.

(a) Mostre que o grupo abeliano $\prod\limits_{n \geq 1} \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$ possui um elemento de ordem infinita.

(b) Mostre que $\frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ para todo $n \geq 1$.

(c) Mostre que $\left(\prod\limits_{n \geq 1} \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq 0$ (*Dica:* Exercíco 13).

(d) Mostre que

$$\left(\prod_{n \geq 1} \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \ncong \prod_{n \geq 1} \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\right)$$

15.- Seja R um anel. Considere o $(R, M_n(R))$-bimódulo ${}^nR = \{(y_1, \ldots, y_n) \colon y_1, \ldots, y_n \in R\}$ e o $(M_m(R), R)$-bimódulo $R^m = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} : x_1, \ldots, x_m \in R\right\}$. Mostre que $R^m \otimes_R {}^nR$ é isomorfo a $M_{m \times n}(R)$ como $(M_m(R), M_n(R))$-bimódulos.

16.- Sejam R, S, T anéis. Sejam M, M' dois (R, S)-bimódulos e N, N' dois (S, T)-bimódulos. Dizemos que $f \colon M \to M'$ é um *homomorfismo de* (R, S)*-bimódulos* se f é um homomorfismo de R-módulos à esquerda e de S-módulos à esquerda. Mostre que se $g \colon N \to N'$ é um homomorfismo de (S, T)-bimódulos então $f \otimes g \colon M \otimes N \to M' \otimes N'$ é um homomorfismo de (R, T)-bimódulos.

17.- (a) Mostre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ são isomorfos como $\mathbb{Q}$-espaços vetoriais. (Dica: todo elemento de $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ pode ser expresso como $\frac{a}{b} \otimes 1$).

(b) Sejam M e N $\mathbb{Q}$-espaços vetoriais. Observe que M e N também são $\mathbb{Z}$-módulos. Mostre que $M \otimes_{\mathbb{Q}} N$ e $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ são $\mathbb{Q}$-espaços vetoriais isomorfos. (Dica: $M \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong M \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} N$).

18.- Mostre que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ e $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ não são isomorfos como $\mathbb{R}$-espaços vetoriais.

19.- Seja K um anel comutativo. Sejam M e N K-módulos. Denotamos M^* e N^* os respectivos duais, i.e. $M^* = \operatorname{Hom}_K(M, K)$, que tem estrutura de K-módulo. Verifique que se $f \in M^*$ e $g \in N^*$, então a função $M \times N \to K$, $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ é uma função K-bilinear de $M \times N$ em K. Logo existe uma única $h \in (M \otimes_K N)^*$ tal que $h(x \otimes y) = f(x)g(y)$.

(a) Mostre que existe um homomorfismo de K-modulos $\varphi \colon M^* \otimes_K N^* \to (M \otimes_K N)^*$ tal que $f \otimes g \mapsto h$.

(b) Mostre que φ é um isomorfismo de K-módulos se M e N são K-módulos livres finitamente gerados. (Dica: M^*, N^* e $(M \otimes_K N)^*$ são K-módulos livres, encontre bases)

(c) Suponha que M e N são somandos diretos de módulos livres finitamente gerados, i.e. existem K-módulos M' e N' tais que $M \oplus M'$ e $N \oplus N'$ são K-módulos livres finitamente gerados. Mostre que φ ainda é um isomorfismo.

(d) Se K for um corpo, mostre que φ é injetor (sem importar se M e N são finitamente gerados).

20.- * Seja S um anel que satisfaz IBN. Mostre, usando produto tensorial, que se existir um homomorfismo de anéis $R \to S$ então R satisfaz IBN. (Dica: S é um R-módulo, considere $R^n \otimes_R S$).

21.- Seja $\mathbb{Z}[i]$ o anel dos inteiros de Gauss (o subanel de $\mathbb{C}$ gerado por $\mathbb{Z}$ e i). Mostre que $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[i]$ e $\mathbb{C}$ são anéis isomorfos.

22.- * Seja K um anel comutativo. Mostre que as K-álgebras $M_m(K) \otimes_K M_n(K)$ e $M_{mn}(K)$ são isomorfas.

23.- Seja K um anel comutativo, e $K[x,y]$, $K[x]$, $K[y]$ os anéis de polinômios nas variáveis x e y, x, y, respectivamente. Mostre que as K-álgebras $K[x,y]$ e $K[x] \otimes_K K[y]$ são isomorfas.

24.- * Seja K um anel comutativo. Dado um grupo G escrevemos $K[G]$ para denotar a K-álgebra de grupo. Dados dois grupos G, H, mostre que as K-álgebras $K[G \times H]$ e $K[G] \otimes_K K[H]$ são isomorfas.

25.- * Seja F um corpo. Suponha que A, B e C são F-álgebras. Mostre que A é isomorfa a $B \otimes_F C$ se, e somente se, A contém subalgebras B' e C' tais que satisfazem as seguintes condições:

(i) $B' \cong B$ e $C' \cong C$ como F-álgebras,

(ii) os elementos de B' comutan com os elementos de C'

(iii) existem F-bases $\{x_i \colon i \in I\}$ de B' e $\{y_j \colon j \in J\}$ de C' tais que $\{x_i y_j \colon (i,j) \in I \times J\}$ é uma base de A.

Se A for de dimensão finita, (iii) pode ser substituida por

(iv) A está gerada como F-álgebra por $B' \cup C'$ e $\dim_F A = (\dim_F B)(\dim_F C)$.

26.- Seja k um anel comutativo e R uma k-álgebra. Definimos a *k-álgebra envolvente* R^e de R como $R^e = R \otimes_k R^{op}$. Mostre que R é um R^e-módulo à esquerda cujos submódulos são os ideais de R. Mostre que se R é simples, então R é um R^e-módulo simples.

27.- * Sejam R um anel comutativo e A, B R-álgebras. Mostre que M é um (A,B)-bimódulo se, e somente se, M é um $A \otimes_R B^{op}$-módulo à esquerda.