MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Lista 3

1.- * Sejam R um anel e $S \subseteq R$ tal que satisfaz as seguintes afirmações (a) $1 \in S$, $0 \notin S$; (b) $SS \subseteq S$; (c) $S \subseteq Z(R)$; (d) Se existirem $r \in R$ e $s \in S$ tais que $rs = 0$, então $r = 0$. Considere o homomorfismo canônico $\varphi\colon R \to RS^{-1}$, $r \mapsto \frac{r}{1}$.

(a) Mostre que o anel RS^{-1} tem a seguinte propriedade universal: Seja B um anel tal que existe um homomorfismo de anéis $f\colon R \to B$ tal que $f(s)$ é inversível para todo $s \in S$. Então existe um único homomorfismo de anéis $\psi\colon RS^{-1} \to B$ tal que $f = \psi\varphi$. Observa que devemos definir $\psi(\frac{r}{s}) = f(r)f(s)^{-1}$ e que $f(s)$ comuta com todo elemento da imagem de f.

(b) Mostre que qualquer outro anel C tal que existe um homomorfismo $\varphi\colon R \to C$ com $\varphi(s)$ inversível para todo $s \in S$ e que satisfaz a propriedade universal anterior é isomorfo a RS^{-1}.

(c) Seja $R = \{a + bi + cj + dk\colon a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ e $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Mostre que RS^{-1} é isomorfo ao subanel dos quaternios $T = \{a + bi + cj + dk\colon a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

(d) Seja $R = M_n(\mathbb{Z})$ e $S = \{aI_n\colon a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Mostre que RS^{-1} é isomorfo a $M_n(\mathbb{Q})$.

2.- * Sejam R um anel e $S \subseteq R$ tal que satisfaz as seguintes afirmações (a) $1 \in S$, $0 \notin S$; (b) $SS \subseteq S$; (c) $S \subseteq Z(R)$; (d) Se existirem $r \in R$ e $s \in S$ tais que $rs = 0$, então $r = 0$. Sejam M e N R-módulos à direita.

(a) Mostre que no conjunto $M \times S$,

$$(m_1, s_1) \sim (m_2, s_2) \iff \text{existe } s \in S \text{ tal que } (m_1 s_2 - m_2 s_1)s = 0.$$

define uma relação de equivalência. Dados $m \in M$ e $s \in S$ a classe de equivalência de (m, s) será denotada por $\frac{m}{s}$. E o conjunto das classes de equivalência MS^{-1}.

(b) Mostre que a operação $\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{mt+ns}{st}$ faz de MS^{-1} um grupo abeliano com elemento neutro $\frac{0}{1} = \frac{0}{s}$, $s \in S$.

(c) Mostre que MS^{-1} é um RS^{-1}-módulo onde $\frac{m}{s}\frac{a}{t} = \frac{ma}{st}$.

(d) Mostre que a função $\varphi\colon M \to MS^{-1}$, $m \mapsto \frac{m}{1}$, é um homomorfismo R-módulos com $\ker\varphi = \{m \in M\colon ms = 0 \text{ para algum } s \in S\}$.

(e) Mostre que se $f\colon M \to N$ é um homomorfismo de R-módulos a direita, então $MS^{-1} \to NS^{-1}$, $\frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}$ é um homomorfismo de RS^{-1}-módulos.

3.- Mostre que, em geral, um submódulo de um módulo livre não é um módulo livre. Por exemplo seja $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ é submódulo do R-módulo livre R.

4.- * Mostre que o grupo abeliano $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo livre. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é um somando direto de um $\mathbb{Z}$-módulo livre.

5.- * Dizemos que um grupo abeliano D é *divisível* se, para cada $x \in D$ e cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x' \in D$ tal que $x = nx' = x' + \overset{(n}{\cdots} + x'$.

(a) Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ são divisíveis.

(b) Mostre que se A é um grupo abeliano divisível e livre de torção. Mostre que na definição de divisível o x' é único.

(c) Se A é um grupo abeliano divisível e livre de torção e B é um grupo abeliano, mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ é um grupo abeliano, divisível e livre de torção.

(d) Se A é um grupo abeliano de torção e B é um grupo abeliano livre de torção, então $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$. Mostre que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$.

6.- * Seja R um anel, L um R-módulo à esquerda e M um R-módulo à direita.

(a) Mostre que $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ tem estrutura de R-módulo à esquerda. Para cada $a \in R$ e $f \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ defina $af\colon M \to R$ como $(af)(m) = a(f(m))$ para todo $m \in M$.

(b) Mostre que $\mathrm{Hom}_R(R, L)$ tem estrutura de R-módulo à esquerda. Para cada $a \in R$ e $f \in \mathrm{Hom}_R(R, L)$ defina $(r)(af) = (ra)f$ para todo $r \in R$.

(c) Mostre que $\mathrm{Hom}_R(L, R)$ tem estrutura de R-módulo à direita. Para cada $a \in R$ e $f \in \mathrm{Hom}_R(L, R)$ defina $(x)(fa) = ((x)f)a$ para todo $x \in L$.

7.- * Seja R um anel e seja $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de R-módulos à direta. Considere o produto cartesiano $M = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \colon m_\lambda \in M_\lambda\}$. O conjunto M tem estrutura de R-módulo à direita dada por

$$(m_\lambda) + (n_\lambda) = (m_\lambda + n_\lambda), \qquad (m_\lambda)a = (m_\lambda a),$$

para cada $(m_\lambda), (n_\lambda) \in M$ e $a \in R$. Note que $0_M = (0_{M_\lambda})$. Para cada $\rho \in \Lambda$, a função $\pi_\rho \colon M \to M_\rho$, $(m_\lambda) \mapsto m_\rho$ é um homomorfismo sobrejetor de R-módulos.

Considremos agora N_R, um R-módulo, e $f_\lambda \colon N \to M_\lambda$ um homomorfismo de R-módulos para cada $\lambda \in \Lambda$. Mostre que existe um único homomorfismo de R-módulos $f \colon N \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tal que $\pi_\lambda f = f_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Além disso, $\ker f = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \ker f_\lambda$.

Mostre também que se existir outro R-módulo T_R com a mesma propriedade que M então é isomorfo a M. Ou seja, se T é munido com homomorfismos de R-módulos $\theta_\lambda \colon T \to M_\lambda$ tais que se para cada R-módulo N e homomorfismos $g_\lambda \colon N \to M_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, existe um único homomorfismo $g \colon N \to T$ tal que $\theta_\lambda g = g_\lambda$, então T é isomorfo a M.

8.- * Seja R um anel, seja M_R um R-módulo à direita e seja $\{N_i\}$ uma família de R-módulos à direita.

(a) Mostre que existe um isomorfismo de grupos abelianos

$$\varphi \colon \mathrm{Hom}_R\Big(M, \prod_{i\in I} N_i\Big) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M, N_i),$$

definido por $f \mapsto (\pi_i f)$, onde os π_i denotam as projeções do produto direto $\prod_{i\in I} N_i$.

(b) Mostre que existe um isomorfismo de grupos abelianos

$$\psi \colon \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{i\in I} N_i, M\Big) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N_i, M),$$

definido por $f \mapsto (f\eta_i)$ onde os η_i denotam as inclusões naturais na soma direta $\bigoplus_{i\in I} N_i$.

(c) Mostre que se o conjunto I for finito, então temos isomorfismos de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_R\Big(M, \bigoplus_{i\in I} N_i\Big) \to \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M, N_i), \quad \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{i\in I} N_i, M\Big) \to \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N_i, M)$$

(d) Seja p um número primo e seja C_n o grupo cíclico de p^n elementos, onde n é um inteiro positivo. Se $M_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n\geq 1} C_n$, mostre que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(M, \bigoplus_{n\geq 1} C_n\Big) \ncong \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, C_n).$$

(Dica: Prove que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, M)$ possui um elemento de ordem infinita, mas que todo elemento em $\bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, C_n)$ tem ordem finita.)

(e) Comentário: É conhecido que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}, \mathbb{Z}\Big) \ncong \prod_{n\geq 1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}),$$

mas leva bastante trabalho.

9.- Comentário: $M = \prod_{i\geq 1} \mathbb{Z}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo livre, i.e. $\prod_{i\geq 1} \mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}^{(I)}$ para nenhum conjunto I. Uma prova simples desse fato está no livro do Lam, Lectures on Modules and Rings, páginas 22 e 23. Seria bom você lembrar do resultado e tentar entender a prova (para isso substitua a palavra "projective" por "free". Mais para frente vamos ver que todo módulo livre é projetivo).

10.- Mostre que todo anel finito satisfaz IBN.

11.- Seja K um corpo. Mostre que toda K-álgebra de dimensão finita satisfaz IBN. Mostre que $M_n(K)$ satisfaz IBN.

12.- Seja R um anel tal que existe um homomorfismo de anéis $R \to D$ onde D é um anel com divisão. Mostre que R satisfaz IBN.

13.- * Seja R um anel e seja $\alpha\colon R \to R$ um endomorfismo de anéis.

(a) Seja G um grupo e considere o anel de grupo $R[G]$. Mostre que $R[G]$ satisfaz IBN se, e somente se, R satisfaz IBN.

(b) Mostre que R satisfaz IBN se, e somente se, $R[x;\alpha]$ satisfaz IBN.

(c) Mostre que R satisfaz IBN se, e somente se, $R[[x;\alpha]]$ satisfaz IBN.

(d) Mostre que todo anel local satisfaz IBN.

14.- * Seja $\Gamma = (V, E, \iota, \tau)$ um grafo orientado finito. Seja K um corpo e considere a álgebra de caminhos $K\Gamma$.

(a) Mostre que o conjunto I formado pelas K-combinações lineares de caminhos de longitude pelo menos 1 é um ideal de $K\Gamma$.

(b) Mostre que $K\Gamma/I$ é isomorfo (como anel) a $K^{|V|}$, i.e. ao produto de direto de cópias de K, tantas como elementos tem V.

(c) Mostre que $K\Gamma$ satisfaz IBN.

15.- O que está errado no seguinte raciocínio para mostrar que todo anel/álgebra satisfaz IBN?
Suponha que a k-álgebra A está gerada sobre k por $\{x_i \colon i \in I\}$. Seja I o ideal gerado pelo conjunto $\{x_i x_j - x_j x_i \colon i \neq j\}$. Então R/I é uma k-algebra comutativa e existe um homomorfimos $A \to A/I$. Como a k-álgebra comutativa A/I satisfaz IBN, então A satisfaz IBN.

16.- * Encontre um exemplo de um anel R não nulo tal que $M_n(R) \cong M_m(R)$ para quaisquer inteiros $m, n \geq 1$.