MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Lista 2

1.- * Seja R um anel munido de um antihomomorfismo $h\colon R \to R$, e M_R um R-módulo.

(a) Mostre que M pode ser considerado como um R-módulo à esquerda com o produto $a \cdot m = mh(a)$ para todo $a \in R$.

(b) Suponha que h é uma involução. Mostre que se um subconjunto N de M é um submódulo de M_R, ele também é um submódulo de ${}_RM$ e viceversa.

(c) Seja R um anel. Mostre que $M_{m\times n}(R)$ tem estrutura de $M_n(R)$-módulo à esquerda.

(d) Seja R um anel comutativo e G um grupo. Considere o anel de grupo $R[G]$. Mostre que todo $R[G]$-módulo à direita também é um $R[G]$-módulo à esquerda.

2.- * Seja R um anel e M_R um módulo. Seja X um subconjunto de M. Definimos o *anulador* de X como o conjunto

$$\operatorname{ann}(X) = \{a \in R\colon xa = 0 \text{ para todo } x \in X\}.$$

(a) Mostre que $\operatorname{ann}(X)$ é um ideal à direita de R e que se X for um submódulo de M, então $\operatorname{ann}(X)$ é um ideal de R.

(b) Seja Y um subconjunto de M. Mostre que $X \subseteq Y$ implica que $\operatorname{ann}(Y) \subseteq \operatorname{ann}(X)$.

(c) Seja N um R-módulo à direita. Mostre que se $M \cong N$, então $\operatorname{ann}(M) = \operatorname{ann}(N)$.

(d) Seja $\{M_i\colon i \in I\}$ uma família de submódulos de M tais que $M = \sum_{i\in I} M_i$. Mostre que $\operatorname{Ann}(M) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{ann}(M_i)$.

(e) Mostre que se K for um ideal à direita de de R, então tem-se que $\operatorname{ann}(R/K)$ é o maior ideal J de R tal que $J \subseteq K$.

(f) Mostre que se $M = mR$ (i.e. M é um R-módulo cíclico), então $M \cong R/N$ (como R-módulos), onde $N = \operatorname{ann}(m)$.

3.- Seja R um anel. Seja M_R um R-módulo (à direita). Seja

$$\operatorname{ann}_R(M) = \{a \in R\colon ma = 0, \text{ para todo } m \in M\}.$$

(a) $\operatorname{ann}_R(M)$ é um ideal de R.

(b) Seja I um ideal de R tal que $I \subseteq \operatorname{ann}_R(M)$. Mostre que M é um R/I-módulo com a mesma soma que M_R e produto definido por

$$M \times R/I \to M, \quad (m, a + I) \mapsto ma. \tag{1}$$

(c) Mostre o recíproco de (b): Se (1) faz de M um R/I-módulo (com a mesma soma que M), então $I \subseteq \operatorname{ann}_R(M)$.

(d) Suponha que M_R é livre com base X. Se J é um ideal de R, então MJ é um submódulo de M e M/MJ é um R/J-módulo. Seja $\pi\colon M \to M/MJ$ a projeção natural. Então M/MJ é um R/J-módulo livre com base $\pi(X) = \{\pi(x)\}_{x\in X}$

4.- * Seja D um anel com divisão e V_D um D-módulo à direita.

(a) Mostre que V é um D-módulo livre. Em particular, todo espaço vetorial tem uma base. Mais geralmente, usando o lema de Zorn, mostre que se S gera V e $B_0 \subseteq S$ é um subconjunto linearmente independente, então existe uma base B de V tal que $B_0 \subseteq B \subseteq S$.

(b) Qualquer subconjunto D-linearmente independente de V pode ser extendido a uma base de V.

(c) Um subconjunto D-linearmente independente maximal de V é uma base.

(d) Um subconjunto minimal que gera V é uma base.

(e) Mostre que D satisfaz IBN, ou seja, se os D-módulos D^m e D^n são isomorfos então $m = n$.

5.- Seja M_R um R-módulo e sejam A, B e C submódulos de M. Se $C \subseteq A$, mostre que

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C.$$

Essa igualdade é conhecida como a *lei modular*. Mostre, com um exemplo, que essa fórmula não é necessariamente verdadeira se C não estiver contido em A.

6.- Seja R um anel e L_R um R módulo finitamente gerado. Denotamos por $\mu(L)$ o número mínimo de geradores de L.
Seja agora M_R um R-módulo e N um submódulo de M_R. Se N e M/N são finitamente gerados, então M também é finitamente gerado e

$$\mu(M) \leq \mu(N) + \mu(M/N).$$

7.- Seja F um corpo e $R = F[x_1, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios com coeficientes em F nas n variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Considere o R-módulo R_R e N_R o submódulo de R formado por todos os polinômios cujo termo constante é zero. Mostre que $\mu(R) = 1$ e $\mu(N) = n$.

8.- Mostre que o subanel $\mathbb{Z}[\frac{p}{q}]$ de $\mathbb{Q}$, i.e. o subanel de $\mathbb{Q}$ gerado por $\mathbb{Z}$ e $\frac{p}{q}$, onde p, q são inteiros positivos fixados tais que $p < q$ e $mdc(p,q) = 1$, não é finitamente gerado como $\mathbb{Z}$-módulo.

9.- Seja R um anel e suponha que M é um R-módulo livre com base $\mathcal{B} = \{e_j\}_{j\in J}$. Mostre que $\mathrm{Hom}_R(M,N) \cong \prod_{j\in J} N$ como grupos abelianos, para todo R-módulo N.

10.- *Sejam $R_1, \ldots, R_n$ anéis e $R = R_1 \times \cdots \times R_n$.
(a) Se M_i é um R_i-módulo à direita para $1 \leq i \leq n$, mostre que $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ é um R-módulo à direita, sob a ação natural

$$(m_1, \ldots, m_n)(a_1, \ldots, a_n) = (m_1 a_1, \ldots, m_n a_n),$$

onde $m_i \in M_i$ e $a_i \in R_i$ para todo i.
(b) Reciprocamente, suponha que $e_1, \ldots, e_n$ são idempotentes centrais de R tais que $e_1 + \cdots + e_n = 1$, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$, e $R_i = e_i R$. Mostre que se M é um R-módulo, então $M_i = M e_i$ é um R_i-módulo, e $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ como R-módulos.

11.- * Seja R um anel e $f\colon M_R \to M_R$ um endomorfismo de R-módulos tal que $f^2 = f$. Mostre que $M_R \cong \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

12.- * Seja R um anel comutativo. Seja $N \subseteq R$ um R-módulo livre não nulo. Mostre que existe $a \in R$ tal que $N = aR$.
Seja $S = \mathbb{Z}[x]$ e $N = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in S \mid a_0 \in 13\mathbb{Z}\}$. Mostre que N é um S-módulo finitamente gerado e que não é um S-módulo livre.

13.- * Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Se R é um anel, podemos formar o anel de grupo $R[G]$ e considerar o seu subanel $R[H]$. Então $R[G]$ é um $R[H]$-módulo à direita de forma natural. Mostre que $R[G]$ é um $R[H]$-módulo à direita livre. (Dica: Escolha representantes das classes laterais gH e mostre que esses representantes formam uma base de $R[G]$ como $R[H]$-módulo.)

14.- * Seja R um anel, seja M um R-módulo à direita e seja $\{N_j : j \in J\}$ uma família de submódulos de M tais que $M = \sum_{j\in J} N_j$. Suponha que J se escreva na forma $J = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda$ e que essa união seja disjunta. Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $M_\lambda = \sum_{j\in J_\lambda} N_j$.
(a) Mostre que $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.
(b) Mostre que $\sum_{j\in J} N_j$ é direta se, e somente se, as duas condições abaixo estiverem satisfeitas:
  (i) $\sum_{j\in J_\lambda} N_j$ é direta para todo $\lambda \in \Lambda$, e
  (ii) $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ é direta.

15.- Seja F um corpo, e seja

$$\mathcal{I} = \{p_\alpha(x) \colon p_\alpha(x) \text{ é um polinômio mônico irreducível em } F[x]\}.$$

Dizemos que uma função racional $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \in F(x)$ é própria se $\mathrm{grau}(f) < \mathrm{grau}(g)$. Seja $F(x)_{pr}$ o conjunto de todas as funções racionais próprias em $F(x)$.
(a) Mostre que $F(X) \cong F[x] \oplus F(x)_{pr}$ como F-módulos.
(b) Mostre que

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{x^j}{(p_\alpha(x))^k} : p_\alpha(x) \in \mathcal{I};\ 0 \leq j < \mathrm{grau}(p_\alpha(x)),\ k \geq 1 \right\}$$

é uma base de $F(x)_{pr}$ como F-módulo.

16.- Seja N um ideal à direita do anel R tal que $N^k = 0$. Se S_R for um R-módulo simples, então $SN = 0$.

17.- Determine todos os R-mòdulos simples à direita e à esquerda para os seguintes anéis:

$$(a)\ R = \mathbb{Z}, \qquad (b)\ R = \mathbb{C}[x], \qquad (c)\ R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix},\ \text{onde } F \text{ é um corpo.}$$

18.- * Seja $R \to S$ um homomorfismo de anéis. Já sabemos que usando esse homomorfismo todo S-módulo a direita pode ser considerado como um R-módulo à direita. Supondo que S_R é um R-módulo livre, mostre que todo S-módulo livre é um R-módulo livre.