MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Lista 1

1.- *Seja R um anel e $X \subseteq R$ um subconjunto não vazio de R. Mostre que:
(a) $RX := \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \colon r_i \in R,\, x_i \in X,\, n \geq 1\}$ é um ideal à esquerda que contém X.
(b) $RXR := \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i s_i \colon r_i, s_i \in R,\, x_i \in X,\, n \geq 1\}$ é um ideal que contém X.
(c) $RX = \bigcap\{I \colon I$ ideal à esquerda de $R,\, X \subseteq I\}$.
(d) $RXR = \bigcap\{I \colon I$ ideal de $R,\, X \subseteq I\}$.
Dizemos que RXR (respectivamente RX) é o ideal (à esquerda) *gerado* por X.

2.- Seja R um anel. Defina o *centro* de R como $\mathcal{Z}(R) = \{a \in R \mid ax = xa,$ para todo $x \in R\}$, é um subanel de R. Mostre que:
(a) $\mathcal{Z}(R)$ é um subanel de R;
(b) se R é um anel simples então $\mathcal{Z}(R)$ é um corpo. Um anel é *simples* se os únicos ideais de R são R e $\{0\}$;
(c) $\mathcal{Z}(M_n(R)) = \{zI_n \colon z \in \mathcal{Z}(R)\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, e onde I_n denota a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

3.- Seja R um anel e seja X um subconjunto de R. Defina o *centralizador* de X em R como sendo o conjunto

$$\mathrm{Cen}_R(X) = \{a \in R \colon ax = xa, \text{ para todo } x \in X\}.$$

(a) Mostre que $\mathrm{Cen}_R(X)$ é um subanel de R e que $\mathcal{Z}(R) = \mathrm{Cen}_R(R)$.
(b) Mostre que $X = \mathrm{Cen}_R(X)$ se, e somente se, X for um subanel comutativo maximal de R.
(c) Mostre que se $a \in \mathrm{Cen}_R(X)$ for invertível em R, então seu inverso está em $\mathrm{Cen}_R(X)$.

4.- *Mostre que um anel A é uma k-algebra se, e somente se, existe um homomorfismo de anéis $k \to \mathcal{Z}(A)$.

5.- Seja R um anel. Uma *derivação* é uma função $\delta \colon R \to R$ tal que $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ e $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ para todos $a, b \in R$. Mostre que uma função $\delta \colon R \to R$ é uma derivação se, e somente se, a função $R \to M_2(R)$, $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & \delta(a) \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, é um homomorphismo de anéis.

6.- *(a) Seja R um anel e $M_n(R)$ o anel de matrizes de tamanho $n \times n$ sobre R. Mostre que se $\mathfrak{A}$ é um ideal de R, então $M_n(\mathfrak{A})$ é um ideal de $M_n(R)$. E mostre que todo ideal I de $M_n(R)$ é da forma $M_n(\mathfrak{A})$ para um único ideal $\mathfrak{A}$ de R. Em particular, se R é um anel simples, $M_n(R)$ também é simples. (*Dica*: Se I é um ideal de $M_n(R)$, o conjunto das entradas dos elementos de I forma um ideal de R).
(b) Mostre que um homomorfismo de anéis $\varphi \colon R \to S$ induz o homomorfismo de anéis $M_n(R) \to M_n(S)$, $A = (a_{ij}) \mapsto A^{\varphi} = (\varphi(a_{ij}))$ para todo inteiro positivo n.
(c) Seja I um ideal de um anel R, e n um inteiro positivo. Use o teorema do isomorfismo para provar que $M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$.

7.- Mostre que um anel R é um anel com divisão se, e somente se, para cada $a \in R \setminus \{0\}$ existe $b \in R$ tal que $ba = 1$.

8.- Seja X um conjunto. Definimos no conjunto das partes de X, indicado por $\mathcal{P}(X)$, as seguintes operações:

$$A + B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B), \qquad A \cdot B = A \cap B,$$

para cada $A, B \in \mathcal{P}(X)$ e onde A^c denota o complementário de A (em X).
(a) Mostre que $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ é um anel comutativo com $1 = X$ e $0 = \{\emptyset\}$, e que $A^2 = A$ para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.
(b) Seja I um ideal de $\mathcal{P}(X)$ e seja $A \subseteq X$, $A \in I$. Se $a \in A$, mostre que $\{a\} \in I$ e $A \setminus \{a\} \in I$. Além disso, mostre que $I = J_a \oplus I_a$ onde J_a e I_a são ideais de $\mathcal{P}(X)$ dados por $J_a = \{\{a\}, \{\emptyset\}\}$, o ideal gerado por $\{a\}$, e $I_a = \{C \setminus \{a\} \colon C \in I\}$.

9.- *Sejam R e S anéis e $\phi \colon R \to S$ um homomorfismo sobrejetor. Mostre que se $a \in R$ é invertível, central, idempotente, ou nilpotente, respectivamente, então $\phi(a)$ também o é em S. O que acontece com os recíprocos? Para os que não sejam certos, encontre exemplos.

10.- *Seja R um anel. Sejam $a, b \in R$.
  (a) Suponha que ab é invertível. Mostre com um exemplo que a e b não precisam ser invertíveis.
  (b) Se a^n, $n \geq 1$, é invertível, então a é invertível.
  (c) Suponha que $ba = 1$. Se $xa = 0$ implica que $x = 0$, então a é invertível.
  (d) Se R é um domínio, mostre que se $ba = 1$, então $ab = 1$.

11.- * Seja I um conjunto e $\{R_i\}_{i\in I}$ um conjunto de anéis. Mostre que o produto direto $\prod_{i\in I} R_i$ é um anel com a soma e produto definidos como

$$(a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I} = (a_i + b_i)_{i\in I} \qquad (a_i)_{i\in I}(b_i)_{i\in I} = (a_i b_i)_{i\in I}.$$

Supondo que I é finito, mostre que os ideais de $\prod_{i\in I} R_i$ são da forma $\prod_{i\in I} B_i$ onde B_i é um ideal de R_i para cada $i \in I$. É verdadeiro o resultado se I for infinito?

12.- Seja R um anel e $B_1, \dots, B_n$ ideais à esquerda. Mostre que $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ se, e somente se, existem idempotentes $e_1, \dots, e_n$ tais que $e_1 + \cdots + e_n = 1$, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$, e $B_i = Re_i$ para todo i.

13.- Seja R um anel e $B_1, \dots, B_n$ ideais. Mostre que $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ se, e somente se, existem idempotentes centrais $e_1, \dots, e_n$ tais que $e_1 + \cdots + e_n = 1$, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$, e $B_i = Re_i$ para todo i. Mostre que cada B_i é um anel com identidade e_i, e temos um isomorfismo de anéis entre R e o produto direto de anéis $B_1 \times \cdots \times B_n$. Mostre que um isomorfismo de R com um produto direto finito de anéis aparece deste modo.

14.- Seja R um anel e $\sigma\colon R \to R$ um homomorfismo de anéis. Mostre o seguinte:
  (a) $R[x;\sigma]$ ($R[[x;\sigma]]$) é um domínio se, e somente se R é um domínio e σ é injetor.
  (b) Mostre que o conjunto de elementos invertíveis de $R[[x;\sigma]]$ é formado pelas séries $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ com a_0 um elemento invertível em R. Logo se R é um anel local, $R[[x;\alpha]]$ é um anel local.
  (c) $R((x;\sigma))$ é um domínio se, e somente se, R é.
  (d) $R((x;\sigma))$ é um anel com divisão se, e somente se, R é um anel com divisão.

15.- Seja R um anel tal que existem $a, b \in R$ tais que $ab = 1$ mas $ba \neq 1$. Mostre que existem infinitos $d \in R$ tais que $ad = 1$.

16.- *Seja R um anel e G um grupo. Considere o anel de grupo $R[G]$. Mostre as seguintes afirmações:
  (a) A função $\rho\colon R[G] \to R$, $\sum_{g\in G} a_g g \mapsto \sum_{g\in G} a_g$, é um homomorfismo de anéis.
  (b) $\ker \rho$ é o ideal gerado pelo conjunto $\{g - 1 \colon g \in G\}$.
  (c) Se R é um anel comutativo, a função $R[G] \to R[G]$, $\sum_{g\in G} a_g g \mapsto \sum_{g\in G} a_g g^{-1}$ é uma involução.

Lembrete: Seja R um anel e consideremos uma função $f\colon R \to R$. Dizemos que f é um *antihomomorfismo* de anéis se satisfaz: $f(a + b) = f(a) + f(b)$ e $f(ab) = f(b)f(a)$ e $f(1) = 1$ para todos $a, b \in R$. Dizemos que f é uma *involução* se f é um antihomomorfismo tal que f^2 é a identidade. Um exemplo importante de involução é a transposição de matrizes.

17.- Seja R um anel, σ um automorfismo de R, e considere $R[x;\sigma]$. Suponha que existem um anel T, um homomorfismo de anéis $\phi\colon R \to T$, e um elemento $y \in T$ tal que $y\phi(a) = \phi(\sigma(a))y$ para todo $a \in R$. Então existe um único homomorfismo de anéis $\Phi\colon R[x;\sigma] \to T$ tal que $\Phi_{|R} = \phi$ e $\Phi(x) = y$.

18.- Seja $A = \mathbb{C}[x;\sigma]$, onde σ denota a conjugação em $\mathbb{C}$.
  (a) Mostre que $\mathcal{Z}(A) = \mathbb{R}[x^2]$.
  (b) Mostre que $A/A(x^2 + 1)$ é isomorfo a $\mathbb{H}$, os quatérnios. (Use o exercício 17).

19.- Seja K um anel com divisão com centro k.
  (a) Mostre que o centro do anel de polinômios $R = K[x]$ é $k[x]$.
  (b) Seja $a \in K \setminus k$. Mostre que o ideal gerado por $x - a$ em $K[x]$ é o total, $K[x]$.
  (c) Mostre que todo ideal $I \subseteq R$ é da forma $I = Rh$ para algum $h \in k[x]$.

20.- * Seja M um monoide e K um anel comutativo. Mostre que o anel de monoide $K[M]$ satisfaz a seguinte propriedade universal:

> Seja A uma K-álgebra e suponha que existe um homomorfismo de monoides $\theta\colon M \to A$. Então existe um único homomorfismo de K-álgebras $\varphi\colon K[M] \to A$ tal que $\varphi(m) = \theta(m)$ para todo $m \in M$.

21.- * Seja K um anel com divisão e $\alpha\colon K \to K$ um endomorfismo de anéis (observa que é injetor).

(a) Mostre que todo ideal à esquerda de $R = K[x;\alpha]$ é da forma Rp para algum elemento $p \in R$. (Dica: Seja p um elemento de R. Então todo elemento q de R pode ser escrito como $q = dp + r$ onde $\text{grau}(r) < \text{grau}(p)$. Considere p um elemento não nulo do ideal de grau minimal. Mostre que todo elemento do ideal é da forma dp para algum $d \in R$).

(b) Se α em 21a for um automorfismo, mostre que todo ideal à direita de R é da forma pR para algum $p \in R$.

(c) Suponha em 21a que α não é sobrejetor, e seja $b \in K \setminus \alpha(K)$. Mostre que o ideal à direita $\sum_{i=0}^{\infty} x^i bxR$ é uma soma direta dos ideais à direita $x^i bxR$.

22.- * Seja R um anel e denotemos por $U(R)$ o conjunto de elementos invertíveis de R. Dizemos que um anel é *local* se o conjunto $R \setminus U(R)$ é um ideal de R. Mostre que nesse caso $\mathfrak{m} = R \setminus U(R)$ é um ideal e que $R/\mathfrak{m}$ é um anel com divisão. Mostre também que são equivalentes:

(a) R é um anel local

(b) R possui um único ideal maximal à esquerda.

(c) R possui um único ideal maximal à direita.

(d) $(R \setminus U(R),\ +)$ é um grupo.

(e) $a + b \in U(R)$ implica que $a \in U(R)$ ou $b \in U(R)$.

Podem encontrar uma prova no livro do Lam, A First Course in Noncommutative Rings.