MAT5797 - Tópicos de Álgebra

Exame

Exercícios obrigatórios

1.- Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorias. Suponha que $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $F'\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ são dualidades de categorias. Mostre que a composição $F'F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é uma equivalência de categorias. **(1.5 pontos)**

2.- Seja R um anel e seja $\{P_i\}_{i\in I}$ uma família de R-módulos à direita. Mostre que o R-módulo à direita $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ é projetivo se, e somente se, P_i é projetivo para cada $i \in I$. **(1.5 pontos)**

3.- Sejam K um anel comutativo e G, H grupos. Mostre que as K-álgebras de grupo $K[G \times H]$ e $K[G] \otimes_K K[H]$ são isomorfas. **(1.5 pontos)**

Escolha dois exercícios

4.- Seja R um anel. **(3 pontos)**

Sejam $0 \to K \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} M \to 0$ uma sequência exata de R-módulos à direita e $0 \to K' \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} M' \to 0$ uma sequência exata de R-módulos à esquerda.

(a) Mostre que essas sequências induzem um diagrama comutativo de grupos abelianos com linhas e colunas exatas

$$\begin{array}{ccccccc}
K \otimes_R K' & \longrightarrow & F \otimes_R K' & \longrightarrow & M \otimes_R K' & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
K \otimes_R F' & \longrightarrow & F \otimes_R F' & \longrightarrow & M \otimes_R F' & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
K \otimes_R M' & \longrightarrow & F \otimes_R M' & \longrightarrow & M \otimes_R M' & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

(b) Se F é plano e $0 \to K \otimes_R M' \xrightarrow{\alpha\otimes 1_{M'}} F \otimes_R M' \xrightarrow{\beta\otimes 1_{M'}} M \otimes_R M' \to 0$ é exata, mostre que

$$0 \to M \otimes_R K' \xrightarrow{1_M\otimes\alpha'} M \otimes_R F' \xrightarrow{1_M\otimes\beta'} M \otimes_R M' \to 0$$

é exata.

5.- Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\{A_i\}_{i\in I}$, onde I é um conjunto, uma família de objetos de $\mathcal{C}$. **(3 pontos)**

(a) Defina coproduto da família $\{A_i\}_{i\in I}$, que será denotado por $\coprod_{i\in I} A_i$.

(b) Se $\coprod_{i\in I} A_i$ existir e Y é um objeto de $\mathcal{C}$, construa uma bijeção entre os conjuntos $Mor_{\mathcal{C}}(\coprod_{i\in I} A_i, Y)$ e $\prod_{i\in I} Mor_{\mathcal{C}}(A_i, Y)$.

(c) Seja $\mathcal{C}om\mathcal{R}ings$ a categoria dos anéis comutativos (associativos com unidade). Encontre o coproduto de dois anéis comutativos R e S na categoria $\mathcal{C}om\mathcal{R}ings$.

(d) Sejam R um anel e $\mathcal{C} = Comp(R)$ a categoria dos complexos de R-módulos à direita. Encontre o coproduto de dois complexos $\underline{A} = (\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{d_n\colon A_n \to A_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}})$, $\underline{B} = (\{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{\delta_n\colon B_n \to B_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}})$

continua no verso

6.- Seja R um anel. **(3 pontos)**

(a) Dado um diagrama comutativo de R-módulos à direita com linha exata

$$\begin{tikzcd} & E & & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mostre que pode ser completado até um diagrama comutativo de R-módulos à direita com linhas exatas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\alpha'"] & T \arrow[r, "\beta'"] & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[u, "\gamma'"] \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[u, equal, "1_C"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Onde $\alpha' \colon E \to T$ e $\gamma' \colon B \to T$ são dadas pelo pushout de α e γ.

(b) Mostre que um R-módulo à direita E é injetivo se, e somente se, toda sequência exata curta de R-módulos à direita da forma $0 \to E \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$, em que C é cíclico, cinde. (*Dica:* $\Leftarrow$) Aplique o exercício 6a em

$$\begin{tikzcd} & E & & & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"] & R \arrow[r, "\beta"] & R/I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

onde I é um ideal à direita de R onde α e β são a inclusão e projeção usuais.)

7.- Seja R um anel. **(3 pontos)**

(a) Seja $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ uma sequência exata de R-módulos à direita. Mostre que se P é um R-módulo à direita projetivo, então $\mathrm{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_R(P, C)$ é uma sequência exata de grupos abelianos.

(b) Sejam $(I, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\Big((M_i)_{i \in I}, (\varphi_i^j \colon M_i \to M_j)_{i \leq j}\Big)$ um sistema direto de R-módulos à direita, mostre que, para cada R-módulo à direita Y, os grupos abelianos $\mathrm{Hom}_R(\varinjlim M_i, Y)$ e $\varprojlim \mathrm{Hom}_R(M_i, Y)$ são isomorfos.