1 Seja $m_T(t)$ o polinômio mínimo de T.

Para cada $i=1,\dots,n$, temos que $m_T(T)(w_i)=0$,

logo $m_i(t) \mid m_T(t)$.

$m_i(t) \mid p(t)$ para cada i. Então

Seja $p(t) \in F[t]$ tal que $p(T)(w_i)=0$

para todo $i=1,\dots,n$. Então temos que

$p(T)$ é o operador zero pois

$$p(T)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, p(T)(w_i) = 0.$$

Portanto, $m(t) \mid p(t)$.

Assim $m_T(t)$ é o mínimo múltiplo comum dos $m_1(t),\dots,m_n(t)$.

(2) $\dim(\ker p(T)) = 12 = 4\cdot 3$ nos diz que existem 3 blocos de matrizes companheiras na forma racional de T

$2\cdot \dim(\ker p(T)) - \dim(\ker p(T)^2) - \dim(\ker p(T)^0)$

$= 2\cdot 12 - 20 - 0 = 4\cdot 1$

nos diz que existe um bloco da forma

$C_{p(t)}$ onde $C_{p(t)}$ denota a matriz companheira do polinômio $p(t)$.

$2\cdot \dim(\ker p(T)^{90}) - \dim(\ker p(T)^{89}) - \dim(\ker p(T)^{91})$

$= 2\cdot 368 - 360 - 372 = 4\cdot 1$

nos diz que existe um bloco da forma

$C_{p(t)^{90}}$

Assim temos que $748 - 4 - 4\cdot 90 = 748 - 364 = 384$

é o tamanho do bloco que falta.

$384 : 4 = 96$

Logo o bloco que falta é ~~de tamanho~~ da forma

$C_{p(t)^{96}}$

Forma racional de T $\begin{pmatrix} C_{p(t)^{96}} & & \\ & C_{p(t)^{90}} & \\ & & C_{p(t)} \end{pmatrix}$. O polinômio mínimo é então $m_T(t) = p(t)^{96}$

③ t^2-t+1 e $t+1$ são irredutíveis em $\mathbb{R}[t]$

A forma racional fica determinada pelos divisores elementares

Vamos ter um bloco correspondente ao polinômio

mínimo $(t^2-t+1)^2(t+1)^2$.

Os outros divisores elementares tem que dividir o polinômio mínimo e o produto de todos os ~~pol~~ divisores elementares deve ser o polinômio característico.

Além disso se $f_1, \dots, f_s$ são os divisores elementares acontece que $f_{i+1} \mid f_i$ $i=1,\dots,s-1$.

$\boxed{\text{O polinômio mínimo é sempre um divisor elementar}}$

Assim temos como possíveis divisores elementares

- $(t^2-t+1)^2(t+1)^2$, $(t^2-t+1)^2(t+1)^2$
- $(t^2-t+1)^2(t+1)^2$, $(t^2-t+1)^2(t+1)$, $t+1$
- $(t^2-t+1)^2(t+1)^2$, $(t^2-t+1)(t+1)^2$, t^2-t+1
- $(t^2-t+1)^2(t+1)^2$, $(t^2-t+1)(t+1)$, $(t^2-t+1)(t+1)$

Se denotamos por $C_{p(t)}$ a matriz companheira de um polinômio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ temos que as possíveis formas racionais são

$$\begin{pmatrix} C_{(t^2-t+1)^2(t+1)^2} & \\ & C_{(t^2-t+1)^2(t+1)^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{(t^2-t+1)^2(t+1)^2} & & \\ & C_{(t^2-t+1)^2(t+1)} & \\ & & C_{t+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C_{(t^2-t+1)^2(t+1)^2} & & \\ & C_{(t^2-t+1)(t+1)^2} & \\ & & C_{(t^2-t+1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_{(t^2-t+1)^2(t+1)^2} & & \\ & C_{(t^2-t+1)(t+1)} & \\ & & C_{(t^2-t+1)(t+1)} \end{pmatrix}$$

4

$$C_A(t) = \det\begin{pmatrix} t-2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & t+1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & t-1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & t+2 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_1 \leftrightarrow C_2 \\ C_2 \leftrightarrow C_3}}{=} \det\begin{pmatrix} 4 & -1 & t-2 & 5 \\ t+1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & t+2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}}{=} \det\begin{pmatrix} t+1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & t-1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & t-2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & t+2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} t+1 & -2 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} t-2 & 5 \\ -1 & t+2 \end{pmatrix}$$

$$= (t^2-1+2)(t^2-4+5) = (t^2+1)^2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + I = 0.$$

Logo o polinômio mínimo de A é $m_A(t) = t^2+1$

Assim a forma racional tem que ser

$$R = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

C_{t^2+1} matriz companheira de t^2+1

Como t^2+1 é irredutível, temos que $m_{u,A}(t) = t^2+1$ para todo $u \in \mathbb{R}^4$, $u \neq 0$.

(4) Seja $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. O subspaço $\langle u, A(u) \rangle$ é T-invariante e $[A]_{(u, A(u))} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Para completar a base, pegamos $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $v \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Por exemplo, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Assim temos que $\mathcal{B} = (u, A(u), v, A(v))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ e

$$[A]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

~~A~~ Como P serve $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Observa que

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(5) Suponha que $T = SP$ como no enunciado.

$$T^* = P^* S^* = P S^*$$ pois todo operador positivo semidefinido é autoadjunto.

$$T^* T = P S^* S P = P^2$$

usando que para toda isometria $S^* = S^{-1}$

logo P é raiz quadrada de $T^* T$

Como todo operador positivo semidefinido possui uma única raiz quadrada ~~semidefinida~~ positiva semidefinida temos que $\sqrt{T^* T} = P$

A decomposição é única quando T for bijetor

Se T não for bijetor sempre existem varias isometrias S tais que $T = S\sqrt{T^* T}$.

6 (a) Os valores singulares são os autovalores de

$$\sqrt{A^tA}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} t-\frac{13}{2} & 5/2 \\ 5/2 & t-\frac{13}{2} \end{pmatrix} = t^2 - 13t + \frac{169}{4} - \frac{25}{4} = t^2 - 13t + 36$$

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

Logo os autovalores de $\cancel{\sqrt{A^tA}\ \text{são}\ 3}$ A^tA são 9 e 4. Sabemos que os autovalores de $\sqrt{A^tA}$ são as raízes dos autovalores de A^tA

Portanto os autovalores de $\sqrt{A^tA}$ são 3 e 2.

~~(b) As condições dadas dizem que S define uma isometria e P define um operador positivo semidefinido.~~

~~Logo P deve ser $\sqrt{A^tA}$ por 6~~

~~Calculamos $\sqrt{A^tA}$~~

~~A matriz A^tA é diagonalizável com autovalores positivos.~~

7

O operador $P = T + T^*$ é autoadjunto.
Logo existe uma base ortonormal $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ formada por autovetores de P.

Pela hipótese, $\mathcal{B}$ também é uma base ortonormal ~~fo~~ de autovetores de Q.

Logo $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal formada por autovetores de $T = \frac{1}{2}(P+Q)$.

(Se $P(e_i) = \lambda_i e_i$ e $Q(e_i) = \mu_i e_i$, $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$,
então $\frac{1}{2}(P+Q)(e_i) = \frac{1}{2}(\lambda_i + \mu_i) e_i$)

Isso é equivalente a que o ~~[illegible]~~ operador T seja normal (sobre $\mathbb{C}$).

não foi pedido

[Se ~~K~~ V for um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com produto interno, o mesmo argumento mostra que V possui uma base ortonormal formada por autovetores de T. Isso é equivalente a dizer que T é autoadjunto (sobre $\mathbb{R}$)]

Se T é normal, pela decomposição espectral de T temos que $T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i$ onde os λ_i são os diferentes autovalores de T e P_i's são as projeções ortogonais sobre os autoespaços $\ker(T - \lambda_i)$. Lembramos também que os P_i's são autoadjuntos

Assim $T^* = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right)^* = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i P_i$

Temos também $T + T^* = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \bar{\lambda}_i) P_i$

$$T - T^* = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) P_i$$

Pela condição (B), temos que $\lambda_i + \bar{\lambda}_i \neq \lambda_j + \bar{\lambda}_j$ se $i \neq j$. Logo os ~~ao~~ os autovetores de $T + T^*$ são os elementos ou $v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda_j I)$, $j = 1, \ldots, n$, os mesmos que os de T.

Para cada $v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda_j I)$ temos que

$$(T - T^*)(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) P_i\right)(v) = (\lambda_j - \bar{\lambda}_j)(v).$$

Logo (A) é satisfeita.

(8) $A \in M_n(\mathbb{C})$

$\Leftarrow$] Suponha que PAP^{-1} é normal.

Então PAP^{-1} é diag., de fato existe uma matriz $Q \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $Q^* = Q^{-1}$ e

$$Q^* P A P^{-1} Q = D \text{ é diagonal.}$$

Fazendo $X = P^{-1}Q$, temos que X é inversível e

$$X^{-1} A X = D \text{ é diagonal}$$

$\Rightarrow$] Suponha que A é diagonalizável.
Existe uma matriz $Z \in M_n(\mathbb{C})$ inversível tal que

$$Z^{-1} A Z = D \text{ é diagonal.}$$

Aplicando a decomposição polar a Z^{-1}, obtemos que existem ~~matrizes~~ uma matriz S tal que $S^* = S^{-1}$ e

$$Z^{-1} = S\sqrt{(Z^{-1})^* Z^{-1}}$$

$T = \sqrt{(Z^{-1})^* Z^{-1}}$ é tal que $T^* = T$ e é inversível (porque Z^{-1} é) e é positiva definida.

(T é positiva semidefinida + bijetora)

Logo

$$S T A T^{-1} S^* = D$$

$$T A T^{-1} = S^* D S,$$

$(S^* D S)(S^* D S)^* = S^* D D^* S$

$(S^* D S)^* (S^* D S) = S^* D^* D S$

~~Como D é diagonal~~

Como D e D^* são diagonais temos que

$$DD^* = D^* D.$$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma matriz positiva definida P tal que PAP^{-1} é simétrica (autoadjunta)

$\Leftarrow$) é feito igual observando que PAP^{-1} simétrica também é diagonalizável

$\Rightarrow$) Tudo igual só que agora $S^t = S^{-1}$ e temos

$$TAT^{-1} = S^t D S$$

que é simétrica pois D é diagonal.