MAT5730 - ÁLGEBRA LINEAR – Segundo semestre de 2016

Lista 7

Nesta lista V é um K-espaço com produto interno $\langle\, , \,\rangle$, onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

Dizemos que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal se $A^{-1} = A^t$, e dizemos que uma matriz $B \in M_n(\mathbb{C})$ é unitária se $A^{-1} = A^*$. Observa que é equivalente a dizer que essas matrizes definen isometrias em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, respectivamente.

1. Seja E um operador linear em V tal que $E^2 = E$ e tal que E possui um adjunto E^*. Prove que E é autoadjunto se, e somente se, $EE^* = E^*E$. Prove também que, neste caso, E é a projeção ortogonal em $W = \operatorname{Im} E$.

2. Seja T um operador linear em V tal que T admite um adjunto. Prove que se $T^*T = 0$ então $T = 0$.

3. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$. Mostre que A se escreve de modo único como $A = B + iC$, onde B e C são matrizes autoadjuntas.

4. Sejam $S, T \in L(V)$. Suponha que S e T admitem adjuntas.
   (a) Mostre que se S e T são autoadjuntas, então ST é autoadjunta se, e somente se, $ST = TS$.
   (b) Prove que T^*T é autoadjunta.
   (c) Se T é autoadjunta, mostre que S^*TS é autoadjunta.

5. Suponha que a dimensão de V é finita e seja $T \in L(V)$ normal e nilpotente. Mostre que T é o operador nulo.

6. Sejam V um $\mathbb{C}$=espaço de dimensão finita e $T \in L(V)$ um operador normal. Prove que:
   (a) T é autoadjunto se, e somente se, todo autovalor de T é um número real.
   (b) T é unitário se, e somente se, todo autovalor de T é um número complexo de módulo igual a 1.
   (c) T é o operador nulo se, e somente se, todos os autovalores de T são nulos.
   (d) $T^* = -T$ se, e somente se, os autovalores de T são nulos ou números complexos imaginários puros.

7. Seja V um espaço de dimensão finita. Prove que o produto de dois operadores lineares positivos é positivo se, e somente se, eles comutam. Mostre que a soma de dois operadores positivos é um operador positivo.

8. Prove que se a dimensão de V é finita e $T \in L(V)$ é uma isometria e um operador positivo definido, então $T = I$.

9. Suponha que a dimensão de V é finita e seja $T \in L(V)$ um operador linear positivo semidefinido. Prove que se $v \in V$ é tal que $\langle T(v), v \rangle = 0$, então $T(v) = 0$.

10. Prove que toda matriz positiva definida é quadrado de uma matriz também positiva definida.

11. Seja $A \in M_n(K)$ tal que $A^* = A$. Mostre que existe um número real positivo c tal que $A + cI$ é positiva definida.

12. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita e seja $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base qualquer de V. Seja $a_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle$, $i, j = 1, \cdots, n$. Mostre que a matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ é uma matriz positiva definida. Mostre que vale a "recíproca", isto é, se $A \in M_n(K)$ é uma matriz positiva definida então $\langle X, Y \rangle = Y^*AX$ define um produto interno no espaço $M_{n\times 1}(K)$.

13. Prove que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

são matrizes positivas definidas.

14. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Encontre uma matriz ortogonal $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que P^tAP é diagonal.

15. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Prove que existe uma matriz real C tal que $C^3 = A$.

16. Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes simétricas tais que $A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_k^2 = 0$. Prove que $A_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \cdots, k$.

17. Seja $\mathcal{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ é ortogonal}\}$.
    (a) Mostre que $\mathcal{O}(n)$ é um grupo com o produto de matrizes.
    (b) Mostre que $|\det A| = 1$ para toda $A \in \mathcal{O}(n)$.
    (c) Mostre que $|\operatorname{tr} A| \leq n$ para toda $A \in \mathcal{O}(n)$.

18. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, matrizes simétricas tais que $A^5 = B^5$. Prove que $A = B$.

19. Suponha que a dimensão de V é finita e sejam $T \in L(V)$, $S \in L(V)$ uma isometria e $R \in L(V)$ um operador positivo semidefinido tal que $T = SR$. Mostre que $R = \sqrt{T^*T}$.

20. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ ($A \in M_n(\mathbb{R})$) uma matriz inversível. Prove que $A = BC$, onde B é unitária (ortogonal) e C é positiva. Mostre também que esta decomposição é única.

21. Dê exemplo de uma matriz A tal que A^2 é normal, mas A não é normal.

22. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrizes autoadjuntas. Prove que $A + iB$ é normal se, e somente se, $AB = BA$.

23. Suponha que $K = \mathbb{C}$, a dimensão de V é finita e seja $T \in L(V)$. Mostre que T é normal se, e somente se, $T^* = h(T)$ para algum $h(t) \in K[t]$. Conclua que um operador $S \in L(V)$ comuta com T se, e somente se, comuta com T^*.

24. Sejam V um $\mathbb{C}$-espaço de dimensão finita e $T \in L(V)$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
    (a) T é normal.
    (b) $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$, para todo $v \in V$.
    (c) Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in V$. Então $T(v) = \lambda v$ se, e somente se, $T^*(v) = \bar{\lambda} v$.
    (d) Existe E base ortonormal de V tal que $[T]_E$ é diagonal.
    (e) Existe $g \in \mathbb{C}[t]$ tal que $T^* = g(T)$.
    (f) Todo subespaço de V invariante sob T também é invariante sob T^*.
    (g) $T = PF$ onde P é positivo semidefinido, F é uma isometria e $PF = FP$.

25. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita. Seja $T \in L(V)$ um operador autoadjunto de traço nulo. Mostre que existe uma base ortonormal B de V tal que todos os elementos da diagonal principal da matriz de T na base B são nulos.

26. Seja $V = \mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja $T \in L(V)$ um operador ortogonal tal que T admite apenas 1 autovalor real e ele é positivo. Determine a forma racional de T em função de 1 parâmetro.

27. Seja $A \in M_5(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal com polinômio minimal $m_A(t) = (t^2 - 1)(t^2 + t + 1)$. Determine todas as possibilidades para a forma racional de A e as correspondentes formas canônicas de isometrias de A.

28. Seja V um espaço vetorial complexo, de dimensão finita n. Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $T^* = T^k$, para algum inteiro $k > 1$. Mostre que existe uma base ortonormal de V tal que a matriz de T nessa base é
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$
onde, para cada $j = 1, ..., n$, ou $\lambda_j = 0$ ou λ_j é uma raiz $k+1$-ésima da unidade.

29. Suponha que V é dimensão finita $n \geq 1$ e $T\colon V \to V$ um operador linear. Mostre que $|\det T| = \det \sqrt{T^*T}$ de duas formas diferentes: uma usando a decomposição polar e outra usando o fato que $\det T^* = \overline{\det T}$.

30. Suponha que V é de dimensão finita e $T \in L(V)$ tem decomposição em valores singulares dada por
$$Tv = s_1\langle v, e_1\rangle f_1 + \cdots + s_n\langle v, e_n\rangle f_n$$
para todo $v \in V$, onde $s_1, \ldots, s_n$ são os valores singulares de T e $(e_1, \ldots, e_n)$ e $(f_1, \ldots f_n)$ são bases ortonormais de V. Mostre que se $v \in V$, então
    (a) $T^*(v) = s_1\langle v, f_1\rangle e_1 + \cdots + s_n\langle v, f_n\rangle e_n$.
    (b) $T^*T(v) = s_1^2\langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + s_n^2\langle v, e_n\rangle e_n$.
    (c) $\sqrt{T^*T}(v) = s_1\langle v, e_1\rangle e_1 + \cdots + s_n\langle v, e_n\rangle e_n$.
    (d) $T^{-1}(v) = \frac{\langle v, f_1\rangle}{s_1} e_1 + \cdots + \frac{\langle v, f_n\rangle}{s_n} e_n$, se T for invertível.

31. Seja $T \in L(K^3)$ definida por $T(z_1, z_2, z_3) = (z_3, 2z_1, 3z_2)$. Construa explicitamente uma isometria $S \in L(K^3)$ tal que $T = S\sqrt{T^*T}$.

32. Suponha que V é de dimensão finita e $T \in L(V)$. Mostre que
   (a) Existe uma isometria $S \in L(V)$ tal que $T = \sqrt{TT^*}S$.
   (b) T e T^* têm os mesmos valores singulares.
   (c) T não é invertível se, e somente se, 0 não é um valor singular de T.
   (d) $\dim(\operatorname{Im} T)$ é igual ao número de valores singulares não nulos de T (contando multiplicidades).
   (e) T é uma isometria se, e somente se, todos os valores singulares de S são 1.
   (f) Se T for autoadjunto, os valores singulares de T são os valores absolutos de los autovalores de T (contando multiplicidades).

33. Suponha que V é de dimensão finita e sejam $T_1, T_2 \in L(V)$. Mostre que T_1 e T_2 têm os mesmos valores singulares se, e somente se, existem isometrias $S_1, S_2 \in L(V)$ tais que $T_1 = S_1 T_2 S_2$.

34. Suponha que V é de dimensão finita e $T \in L(V)$. Seja $\hat{s}$ o menor valor singular de T, e seja s o maior valor singular de T.
   (a) Mostre que $\hat{s}\|v\| \leq \|T(v)\| \leq s\|v\|$ para todo $v \in V$.
   (b) Suponha que λ é um autovalor de T. Mostre que $\hat{s} \leq \|\lambda\| \leq s$.
   (c) Mostre que T é uniformemente contínua.

35. Suponha que V é de dimensão finita $n \geq 1$ com base ortonormal $(e_1, \ldots, e_n)$ e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Mostre que

$$\operatorname{tr}(T^*T) = \|T(e_1)\|^2 + \ldots + \|T(e_n)\|^2.$$

   Conclua que o valor à direita da igualdade não depende da base ortonormal $(e_1, \ldots, e_n)$ escolhida.

36. Suponha que $K = \mathbb{C}$ e que V é de dimensão finita $n \geq 1$. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de T, onde repetimos um autovalor tantas vezes como a sua multiplicidade algébrica. Suponha que $A = (a_{ij})$ é a matriz de T em relação a uma base ortonormal de V. Mostre que

$$|\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|^2.$$

37. Suponha que V é de dimensão finita e que $T\colon V \to V$ é um operador linear tal que $\|T^*(v)\| \leq \|T(v)\|$ para todo $v \in V$. Mostre que T é normal.

38. Suponha que V é de dimensão finita $n \geq 1$. Mostre que para cada produto interno $\langle\langle -, - \rangle\rangle$ em V existe um único operador positivo definido $T \in L(V)$ tal que $\langle\langle v, w \rangle\rangle = \langle T(v), w \rangle$ para todos $v, w \in V$. (*Dica:* $\langle\langle -, w \rangle\rangle \in V^*$, logo existe um único $w' \in V$ tal que $\langle\langle -, w \rangle\rangle = \langle -, w' \rangle$. Defina $T(w) = w'$).