Lista 6

Nesta lista V é um K-espaço com produto interno $\langle\, , \,\rangle$, onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

1. Seja $T: W \to Z$ uma transformação linear injetora entre K-espaços vetoriais. Suponha que $\langle\, , \,\rangle$, é um produto interno em Z. Mostre que $\langle\langle w_1, w_2\rangle\rangle = \langle T(w_1), T(w_2)\rangle$ para todos $w_1, w_2 \in W$ define um produto interno em W.

2. Mostre que a sequência $v_1, \ldots, v_n \in V$ é linearment independente se, e somente se, a matriz $A = (\gamma_{ij})$ é invertível, onde $\gamma_{ij} = \langle v_j, v_i\rangle$.

3. (a) Se $K = \mathbb{R}$, mostre que para $u, v \in V$, $\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
   (b) Mostre que (a) é falso se $K = \mathbb{C}$.
   (c) Se $K = \mathbb{C}$, mostre que para $u, v \in V$, $\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \|\alpha u + \beta v\|^2 = \|\alpha u\|^2 + \|\beta v\|^2$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

4. Mostre que vale a *lei do paralelogramo*:
$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \text{ para todos } u, v \in V.$$

5. Se $K = \mathbb{R}$, mostre que, para $u, v \in V$, $\|u\| = \|v\|$ se, e somente se, $u + v$ e $u - v$ são ortogonais. Discuta a afirmação para $K = \mathbb{C}$.

6. Se V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, mostre que vale a *identidade de polarização*, para todos $u, v \in V$: $4\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2$.
   Mostre que se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ então vale a *identidade de polarização*, para todos $u, v \in V$: $4\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$.

7. Encontre uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços S e determine também, em cada caso, o subespaço $S^\perp$.
   (a) S é o subespaço de $\mathbb{C}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, i)$ e $v_2 = (2, 1, 1 + i)$, com o produto interno usual.
   (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, com o produto interno usual.
   (c) $S = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid tp'(t) = p(t)\}$ e $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$.
   (d) $S = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\}$ e $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$.

8. Prove que se $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$, então u e v são linearmente dependentes.

9. Sejam W um subespaço de V e $v \in V$. Seja $E : V \to V$ a função tal que $E(v) = w$, a projeção ortogonal de v em W. (Assuma que, para todo $v \in V$, existe tal w.) Prove que
   (a) E é um operador linear em V.
   (b) E é idempotente.
   (c) $\operatorname{Im} E = W$ e $\ker E = W^\perp$.
   (d) $V = W \oplus W^\perp$.

10. Seja W um subespaço de dimensão finita de V. Mostre que $(W^\perp)^\perp = W$. O resultado continua verdadeiro se a dimensão de W não é finita? Considere $\mathbb{R}[x]$ com o produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ e seja U o subespço constituído por todos os polinômios com termo constante igual a zero. Mostre que $U^\perp = \{0\}$ e então $U^{\perp\perp} = \mathbb{R}[x] \neq P$. Também $\mathbb{R}[x] \neq U \oplus U^\perp$. (*Dica:* $U = \{xq(x) \mid q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$). Também podem encontrar uma prova no livro W. K. Nicholson, Álgebra Linear, 2a edição, página 338.

11. *Desigualdade de Bessel:* Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um conjunto ortonormal de V. Então
$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{para todo } x \in V.$$
Além disso, se $W = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$ então são equivalentes:
    (a) $x \in W$;
    (b) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2$;
    (c) $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$;
    (d) $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle$ para todo $y \in V$.
12. *Identidade de Parseval:* Suponha que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de V. Mostre que $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle$ para todos $x, y \in V$.
13. Seja W um subespaço de dimensão finita de V. Existem, em geral, várias projeções cuja imagem é W. Uma delas, a projeção ortogonal, tem a propriedade que $\|E(v)\| \leq \|v\|$, para todo $v \in V$. Prove se $E \in L(V)$ é uma projeção cuja imagem é W e $\|E(v)\| \leq \|v\|$, para todo $v \in V$, então E é a projeção ortogonal em W.
(*Sugestão:* Prove que $\langle E(v), v - E(v)\rangle = 0$, para todo $v \in V$ se, e somente se, $\langle u, E(v)\rangle = 0$, para todo $u \in \ker E$ e $v \in V$.)
14. Sejam W um subespaço de dimensão finita de V e E a projeção ortogonal de V em W. Prove que $\langle E(v), u\rangle = \langle v, E(u)\rangle$ para todos $u, v \in V$. Ou seja, E é autoadjunto.
15. Seja $V = C([0,1])$ o espaço das funções contínuas no intervalo $[0,1]$ com o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
    (a) Exiba uma base ortonormal do subespaço de V gerado pelos polinômios $1, t$ e t^2.
    (b) Encontre o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima $f(t) = \cos t$ no intervalo $[0,1]$.
16. Sejam V e W espaços vetoriais de mesma dimensão (finita) sobre K e com produtos internos $\langle\, ,\, \rangle_V$ e $\langle\, ,\, \rangle_W$, respectivamente. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes:
    (a) $\langle T(u), T(v)\rangle_W = \langle u, v\rangle_V$ para todos $u, v \in V$.
    (b) T leva *toda* base ortonormal de V em uma base ortonormal de W.
    (c) T leva *uma* base ortonormal de V em uma base ortonormal de W.
    (d) $\|T(v)\|_W = \|v\|_V$ para todo $v \in V$.
    (e) $T \circ T^* = I_W$.
    (f) $T^* \circ T = I_V$.
Tal T é um *isomorfismo de espaços com produto interno.*
17. Uma matriz $A \in M_n(K)$ é chamada *ortogonal* se $AA^t = I_n$ e *unitária* se $AA^* = I_n$. Encontre um exemplo de uma matriz complexa unitária que não é ortogonal e um exemplo de uma matriz que é ortogonal e não é unitária.
18. Seja T o operador linear em $\mathbb{C}^2$ (com o produto interno usual) definido por: $T(1,0) = (1+i, 2)$ e $T(0,1) = (i, i)$. Determine a matriz de T^* em relação à base canônica de $\mathbb{C}^2$. Vale que $TT^* = T^*T$?

19. Seja T um operador linear em V que possui um adjunto T^*.
    (a) Mostre que $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ e que $\operatorname{Im} T^* \subset (\ker T)^\perp$.
    (b) Mostre que se $\dim V < \infty$, então $\operatorname{Im} T^* = (\ker T)^\perp$.
    (c) Seja $V = C([0,1], \mathbb{R})$ e $T \in L(V)$ definida por: $f \mapsto T(f)$, com $T(f)(t) = tf(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Determine T^* e mostre que $\operatorname{Im} T^* \neq (\ker T)^\perp$.

20. Seja $T \in L(V)$. Prove que se T é inversível, então T^* é inversível e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

21. Dados dois K-espaços vetoriais A, B dizemos que uma função $f\colon A \to B$ é uma *transformação conjugada* se

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x) \quad \text{para todos } x, y \in V,\ \lambda \in K.$$

    Dados V e W dois espaços vetoriais com produto interno de dimensão finita sobre K, mostre que $L(V,W) \to L(W,V)$, $T \to T^*$, define um isomorfismo conjugado.

22. Suponha que V é de dimensão finita. Definimos $\Phi_V\colon V \to V^*$, $v \mapsto \langle -, x \rangle$.
    (a) Mostre que Φ_V é um isomorfismo conjugado.
    (b) Seja W um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Mostre que $T^*\colon W \to V$ é a única transformação linear tal que $\Phi_V \circ T^* = T^t \circ \Phi_W$.

23. Suponha que V é de dimensão finita e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Dado um subespaço W de V, mostre que W é T-invariante se, e somente se, $W^\perp$ é T^*-invariante.

24. Seja n um inteiro positivo. Consideremos K^n com o seu produto interno usual. Seja $T\colon K^n \to K^n$, $T(z_1, \ldots, z_n) = (0, z_1, \ldots, z_{n-1})$. Encontre uma fórmula para $T^*(z_1, \ldots, z_n)$.

25. Suponha que V é de dimensão finita. Sejam $T\colon V \to V$ um operador linear e $\in K$. Mostre que λ é um autovalor de T se, e somente se, $\overline{\lambda}$ é um autovalor de T^*.

26. Sejam V, W K-espaços vetoriais de dimensão finita e $T \in L(V,W)$. Mostre que
    (a) T é injetora se, e somente se, T^* é sobrejetora;
    (b) T é sobrejetora se, e somente se, T^* é injetora.
    (c) $\dim(\ker T^*) = \dim(\ker T) + \dim W - \dim V$.
    (d) $\dim(\operatorname{Im} T^*) = \dim(\operatorname{Im} T)$.

27. Suponha que $K = \mathbb{C}$ e $\dim V < \infty$. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Definimos

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

    Mostre que
    (a) T_1 e T_2 são autoadjuntos;
    (b) $T = T_1 + iT_2$;
    (c) Se $T = S_1 + iS_2$ onde $S_1, S_2 \in L(V)$ são autoadjuntos, então $T_1 = S_1$ e $T_2 = S_2$.
    (d) T é normal se, e somente se, T_1 e T_2 comutam, se, e somente se $TT^* = T^*T = T_1^2 + T_2^2$.