MAT5730 - Álgebra Linear

Prova 2 - 24/11/2016

1. Sejam F um corpo, V um F-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ uma base de V e $T\colon V \to V$ um operador linear. Sejam $m_1(t), \ldots, m_n(t) \in F[t]$ tais que $m_{u_i,T}(t) = m_i(t)$ para $i = 1, \ldots, n$, ou seja, o T-anulador de u_i é $m_i(t)$ para cada i. Encontre o polinômio mínimal de T. **(1.4 pontos)**

2. Sejam F um corpo, V um F-espaço vetorial de dimensão 748 e $T\colon V \to V$ um operador linear. Seja $p(t) \in F[t]$ um polinômio irredutível de grau 4 tal que $m_T(t) = p(t)^d$ para um certo inteiro positivo d. Suponha que
   - $\dim(\ker p(T)) = 12$
   - $\dim(\ker p(T)^2) = 20$
   - $\dim(\ker p(T)^{89}) = 360$
   - $\dim(\ker p(T)^{90}) = 368$
   - $\dim(\ker p(T)^{91}) = 372.$

   Encontre a forma racional de T e o polinômio mínimal de T. **(1.1 pontos)**

3. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão 12 e $T\colon V \to V$ uma transformação linear tal que
$$c_T(t) = (t^2 - t + 1)^4(t+1)^4, \qquad m_T(t) = (t^2 - t + 1)^2(t+1)^2.$$
   Determine as possíveis formas racionais de T. **(1.4 pontos)**

4. Determine a forma racional R da matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$
   e encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = R$. **(1.6 pontos)**

5. Seja V um K-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno, onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Sejam $T \in L(V)$ tal que existem uma isometria $S \in L(V)$ e um operador positivo semidefinido $P \in L(V)$ tais que $T = SP$. Mostre que $P = \sqrt{T^*T}$ e discuta a unicidade da decomposição $T = SP$. **(1.4 pontos)**

6. Encontre os valores singulares de $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. **(1.1 pontos)**

7. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com produto interno $\langle \_, \_ \rangle$ de dimensão finita $n \geq 1$. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear que satisfaz a condição
$$\textit{todo autovetor de } P = T + T^* \textit{ é também autovetor de } Q = T - T^* \qquad \text{(A)}$$
   Mostre que T é normal.
   Prove o seguinte recíproco parcial, se T é normal e satisfaz a seguinte condição,
$$\textit{se } \lambda_i \neq \lambda_j \textit{ são autovalores de } T\textit{, então } Re(\lambda_i) \neq Re(\lambda_j) \qquad \text{(B)}$$
   então T satisfaz a condição (A) anterior. **(1.5 pontos)**

8. Seja n um inteiro positivo, e $A \in M_n(\mathbb{C})$. Mostre que A é diagonalizável se, e somente se, existe uma matriz positiva definida P tal que PAP^{-1} é normal. Enuncia e prova um resultado semelhante para $A \in M_n(\mathbb{R})$. (*Dica:* decomposição polar) **(1.5 pontos)**