MAT5730 - Álgebra Linear

Exame - 02/12/2016

Exercícios obrigatórios

1. Seja K um corpo, V um K-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{C} = (d_1, \dots, d_n)$ duas bases de V. Sejam φ a única forma n-linear alternada tal que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$ e ψ a única forma n-linear alternada tal que $\psi(d_1, \dots, d_n) = 1$. Encontre $\alpha \in K$ tal que $\varphi = \alpha\psi$.

2. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ com produto interno.
   (a) Seja $T \colon V \to V$ um operador linear e U um subespaço de V. Mostre que U é T-invariante se, e somente se, $U^\perp$ é T^*-invariante.
   (b) Sejam $S, T \colon V \to V$ operadores normais. Mostre que existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[S]_\mathcal{B}$ e $[T]_\mathcal{B}$ são diagonais se, e somente se, $ST = TS$.

Escolha quatro exercícios

3. Classifique, a menos de semelhança, as matrizes reais de ordem 6 com polinômio minimal $(t-1)^3(t-2)$ dando a forma de Jordan e a forma racional de cada um dos representantes da classe de semelhança.

4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ sobre um corpo K. Seja $f(t) \in K[t]$ um polinômio mônico, irredutível e de grau $d \geq 1$ com $d|n$.
   (a) Prove que existe $T \in L(V)$ tal que $m_T(t) = f(t)$. Quais são as possíveis formas racionais de T?
   (b) Sejam $T \in L(V)$ e $v \in V$ tais que $m_T(t) = m_{v,T}(t) = f(t)$. Mostre que para todo $w \in V$ com $w \notin Z_{v,T} = \{p(T)(v) \colon p(t) \in K[t]\}$, temos que $Z_{v,T} \cap Z_{w,T} = \{0\}$.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_6(\mathbb{R}).$$

   Determine a forma racional R de A e encontre uma matriz $P \in M_6(\mathbb{R})$ inversível tal que $P^{-1}AP = R$.

6. Considere as matrizes sobre o corpo $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{bmatrix} -378 & 588 & 333 \\ 588 & 799 & 777 \\ 333 & 777 & 111 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 50 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{77} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{77} \end{bmatrix}, \ D = C^tC, \ E = C + C^t.$$

   (a) Quais das matrizes anteriores são diagonalizáveis em relação a uma base *ortonormal*?
   (b) Quais das matrizes anteriores são diagonalizáveis em relação a uma base *ortonormal* com *todos* os autovalores positivos?

7. Seja $A \in M_4(\mathbb{C})$ com todas as suas entradas reais. Suponha que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix}$$

   (a) Encontre a forma de Jordan real J de A e uma matriz $Q \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $Q^{-1}AQ = J$.
   (b) Define A um operador normal em $\mathbb{C}^4$? E uma isometria em $\mathbb{C}^4$? E uma isometria em $\mathbb{R}^4$?

8. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com produto interno de dimensão finita $n \geq 1$. Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $T^* = T^k$, para algum inteiro $k > 1$. Mostre que existe uma base ortonormal de V tal que a matriz de T nessa base é

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

   onde, para cada $j = 1, ..., n$, ou $\lambda_j = 0$ ou λ_j é uma raiz $(k+1)$-ésima da unidade.