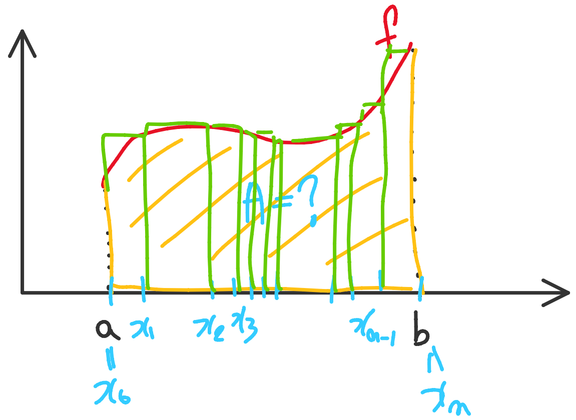
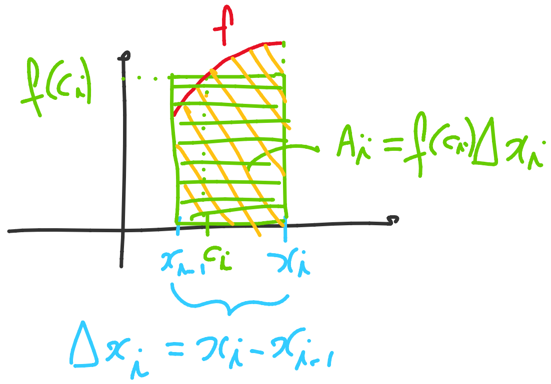
Integral de Riemann (T4)

<u>Problema</u>: Seja f uma função contínua num intervalo $[a,b]$. Suponha $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. Determine a área da figura compreendida entre o gráfico de f, o eixo Ox e as retas $x = a$ e $x = b$.





$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow A = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \in \mathbb{R}$$

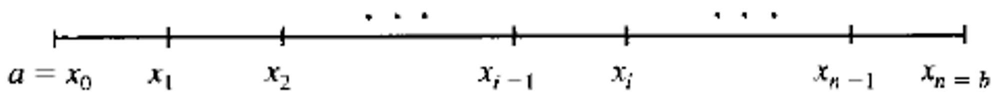
<u>Notação</u> $A = \int_a^b f(x)\,dx$ = integral definida de f em $[a,b]$

= integral de Riemann de f em $[a,b]$

<u>Partição de um intervalo</u>

<u>Definição</u>: Uma partição P de um intervalo $[a,b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

Uma partição P de $[a,b]$ divide $[a,b]$ em n intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, de comprimentos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,2,\dots,n$.



Definição: Sejam f uma função definida em $[a,b]$ e L um número real. Considere uma partição P de $[a,b]$. Considere ainda um ponto c_i em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta\, x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$

é chamado de soma de Riemann, relativa à partição P e aos números $c_i's$.

Definição: Considerando várias partições P de $[a,b]$ se

$$\lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta\, x_i = L \in \mathbb{R},$$

então L é chamado de integral de Riemman de f em $[a,b]$ e é denotado por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta\, x_i \in \mathbb{R}$$

Teorema: Sejam f, g integráveis em $[a,b]$ e k uma constante. Então

a) $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

b) kf é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

c) Se $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

d) Se $c \in \,]a,b[$ e f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Teorema Fundamental do Cálculo: Se f for integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$