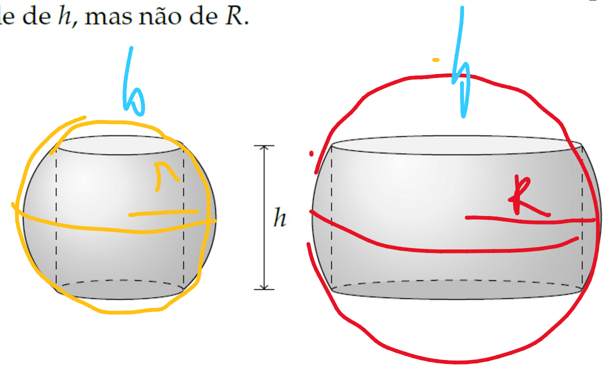
Exercícios 2

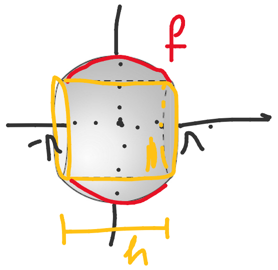
Lista 6

12. Um anel esférico é o sólido que permanece após a perfuração de um buraco cilíndrico através do centro de uma esfera sólida. Se a esfera tem raio R e o anel esférico tem altura h, prove o fato notável de que o volume do anel depende de h, mas não de R.

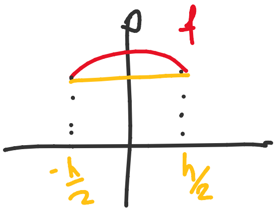
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$



$$x^2+y^2=r^2$$
$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$$
$$\Rightarrow f(x)=+\sqrt{r^2-x^2}$$



$$V=V_1-V_2$$
$$V=\pi\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx-\pi\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sqrt{\frac{4r^2-h^2}{4}}\right)^2dx$$



$$f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$$
$$f(h/2)=\sqrt{r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4r^2-h^2}{4}}=m$$

$$V=\pi 2\int_0^{h/2}(r^2-x^2)\,dx-\pi(m)^2\cdot h=2\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{h/2}-\pi\left(\frac{4r^2-h^2}{4}\right)\cdot h$$

$$=2\pi\left[\left(\frac{r^2h}{2}-\frac{h^3}{8\cdot 3}\right)-0\right]-\frac{4\pi r^2h}{4}+\frac{\pi h^3}{4}=\pi r^2h-\frac{\pi h^3}{12}-\pi r^2h+\frac{\pi h^3}{4}\cdot\frac{3}{3}$$

$$=\frac{2\pi h^3}{12}=\frac{\pi h^3}{6}$$

Lista 5

Questão 2. Sobre $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}\,dt$ podemos afirmar que:

(a) vale 0;
(b) é positiva e menor que $\frac{\pi}{2}$;
(c) é negativa e maior que $-\frac{\pi}{2}$;
(d) é maior que $\frac{\pi}{2}$;
(e) é menor que $-\frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)&=\cos(x)\\ \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)&=-\sin(x)\end{aligned}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(t)}{\sin^3(t)+\cos^3(t)}\,dt = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin^3(x+\pi/2)}{\sin^3(x+\frac{\pi}{2})+\cos^3(x+\frac{\pi}{2})}\,dx = \int_{-\pi/2}^{0}\frac{\cos^3(x)}{\cos^3(x)-\sin^3(x)}\,dx$$

$t = x+\frac{\pi}{2}$
$dt = dx$

$$= \int_{\pi/2}^{0}\frac{\cos^3(-y)}{\cos^3(-y)-\sin^3(-y)}(-dy) = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos^3 y}{\cos^3 y+\sin^3 y}\,dy = \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3 y}{\cos^3 y + \sin^3 y}\,dy$$

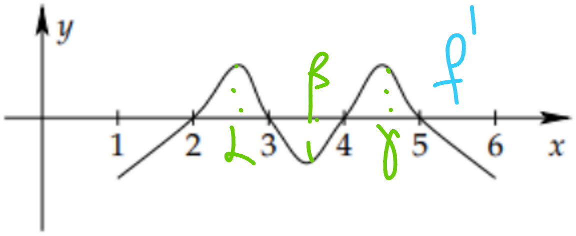
$x=-y$
$dx=-dy$

Teste 32 [raizes2] Seja $f\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

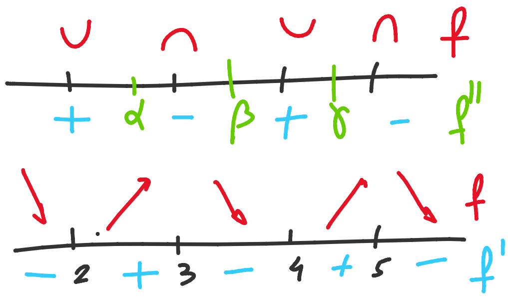
I. $f(3) = -2$ e $f(5) = 3$;

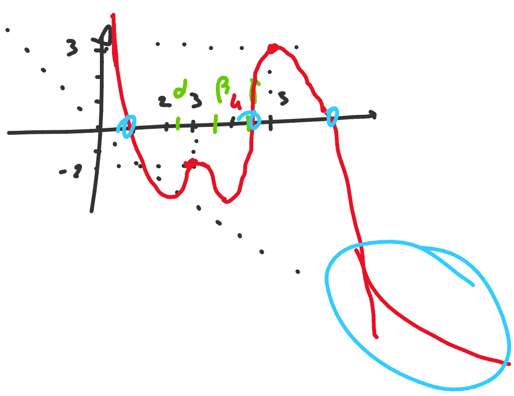
II. as retas $x = 0$ e $y = -x$ são assíntotas para f;

III. f' tem exatamente 4 raízes, e o gráfico de f' no intervalo $[1,6]$ está esboçado na figura abaixo.



É correto dizer que o número de raízes de f no intervalo $]0,+\infty[$ é





Solução: Em $[2,4]$, f não possui raízes, pois f é estritamente crescente em $[2,3]$, estritamente decrescente em $[3,4]$ e $f(3) < 0$. Em particular, $f(2) < 0$ e $f(4) < 0$. Como $x = 0$ é assíntota vertical para f e f é estritamente decrescente em $]0,2]$, resulta que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Além disso, $f(2) < 0$. Portanto, existe exatamente uma raiz de f em $]0,2]$. Em $[4,5]$ existe exatamente uma raiz real de f pois $f(4) < 0$, $f(5) > 0$ e f é estritamente crescente nesse intervalo. Finalmente, em $[5,+\infty[$ também existe exatamente uma raiz real: f é estritamente decrescente, $f(5) < 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, pelo fato de $y = -x$ ser assíntota para $x \to +\infty$.

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{(4-x^2)^3}}\,dx = \int \frac{(x^2)^2 \cdot x\,dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(4-u)^2}{\sqrt{u^3}}\,du =$$

$4-x^2=u$

$-2x\,dx=du$

$x^2=4-u$

$$\int u^\alpha\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+k$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{4-8u+u^2}{u^{3/2}}\,du = -\frac{1}{2}\int \left[4u^{-3/2} - 8u^{-1/2} + u^{1/2}\right]du$$

Lista 4

2. Seja $f(x)$ um polinômio de grau 3, com três raízes reais distintas. Mostre que f tem um ponto de inflexão, que é a média aritmética das três raízes.

Seja $f(x) = \alpha(x-a)(x-b)(x-c)$

$f(x) = \alpha(x^2-(a+b)x+ab)(x-c)$

$f(x) = \alpha(x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc)$

$f'(x) = \alpha(3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc)$

$f''(x) = \alpha(6x-2(a+b+c)) = 0 \iff x = \frac{a+b+c}{3}$

$\cap \quad \cup \quad f$

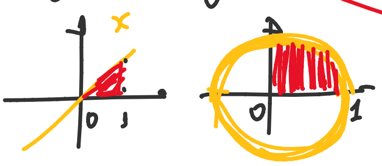
$- \quad \frac{a+b+c}{3} \quad + \quad f''$

$\rightarrow$ pto de inflexão

Lista 5

6. Calcule $\int_0^1 x+\sqrt{1-x^2}\,dx$, interpretando-a como uma área.

$$\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$



$y=\sqrt{1-x^2}$

$y^2=1-x^2$

$x^2+y^2=1$

Lista 4

16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique.

(a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Se f é derivável até segunda ordem com $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

(d) Se existe uma assíntota para f (quando $x \to +\infty$) com coeficiente angular m e se existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$, então $L = m$.

(e) Se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ então f tem uma assíntota com coeficiente angular igual a m.

F a) $f(x) = -\frac{1}{x}$

$f'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) > 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

V b) $f''(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f$ tem concavidade p/cima em $I =]a,\infty[$

$\Rightarrow f(x) > T_p(x), \forall x > a \to f(x) > f(p) + f'(p)(x-p)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) > \lim_{x\to+\infty} \big(f(p) + \underbrace{f'(p)}_{>0}\overbrace{(x-p)}^{+\infty}\big) = +\infty$$

F c) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, porém $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

V d) $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L \Rightarrow m = L$?

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$$

e) $m = 0$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = m$

$$m \overset{?}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{L'H}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = m$$

$$n \overset{?}{=} \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} [\ln x - 0x] = +\infty$$ ∄ assíntota oblíqua.

$f(x) = \ln x + mx$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + mx}{x} = \lim_{x\to+\infty} \Big[\overset{0}{\cancel{\frac{\ln x}{x}}} + m\Big] = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} [\ln x + \cancel{mx} - \cancel{mx}] = +\infty$$

Lista 6

4. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \sin(x-t) f(t)\,dt$$

Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

$$y(x)=\int_0^x (\operatorname{sen} x\cos t-\operatorname{sen} t\cos x)\, f(t)\,dt$$

$$y(x)=\operatorname{sen} x\int_0^x \cos t\, f(t)\,dt-\cos x\int_0^x \operatorname{sen} t\, f(t)\,dt$$

$$y'(x)=\left[\cos x\int_0^x \cos t\, f(t)\,dt+\operatorname{sen} x\cos x\, f(x)\right]-\left[(-\operatorname{sen} x)\int_0^x \operatorname{sen} t\, f(t)\,dt+\cos x\operatorname{sen} x\, f(x)\right]$$

etc

Lista 5

Questão 4. Seja $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função derivável. Sabendo que $F(3)=-1$ e que $\int_0^3 F(x)dx = 0$, o valor de $\int_0^3 xF'(x)dx$ é: (a) -9; (b) 0; (c) 9; (d) 3; (e) -3.

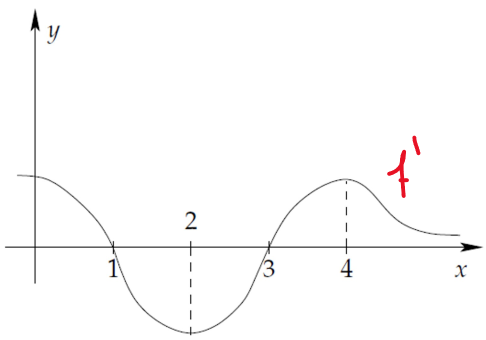
$$\int_0^3 \underbrace{x}_{u}\underbrace{F'(x)\,dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u}\underbrace{F(x)}_{v}\Big|_0^3-\int_0^3 \underbrace{F(x)}_{v}\underbrace{dx}_{du} = \left(3F(3)-0\cdot F(0)\right)-\int_0^3 F(x)\,dx = 3(-1)-0=-3$$

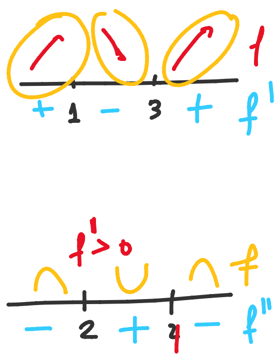
$$\boxed{\begin{array}{ll} u=x & du=dx \\ dv=F'(x)dx & v=F(x)\end{array}}$$

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du$$

Lista 4

9. (Transferência Fuvest 2007) Seja f uma função derivável até segunda ordem e suponha que o gráfico da função derivada f' seja representado pela figura abaixo:





Pode-se afirmar que a única alternativa incorreta é

F **a.** f possui concavidade para cima no intervalo $]1,2[$.
V **b.** $x=1$ é ponto de máximo local de f e $x=3$ é ponto de mínimo local de f.
V **c.** f possui concavidade para cima no intervalo $]3,4[$.
V **d.** f é crescente para $x<1$ e também para $x>3$ e decrescente para $1<x<3$.
V **e.** $x=2$ e $x=4$ são pontos de inflexão de f.