Integrais impróprias (T4)

Definição 1. Seja f integrável em $[a,\ t]$, para todo $t > a$. Definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

desde que o limite exista e seja finito. Tal limite denomina-se *integral imprópria* de f estendida ao intervalo $[a, +\infty[$.

Observação. Se $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ for $+\infty$ ou $-\infty$ continuaremos a nos referir a $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ como uma integral imprópria e escreveremos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \text{ ou } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty.$$

Se ocorrer um destes casos ou se o limite não existir, diremos que a integral imprópria é *divergente*. Se o limite for finito, diremos que a integral imprópria é *convergente*.

Suponhamos $f(x) \geq 0$ em $[a, +\infty[$ e que f seja integrável em $[a,\ t]$ para toda $t > a$. Seja A o conjunto de todos $(x,\ y)$ tais que $0 \leq y \leq f(x)$ e $x \geq a$. Definimos a área de A por

$$\boxed{\text{área } A = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.}$$

EXEMPLO 1. Calcule $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$.

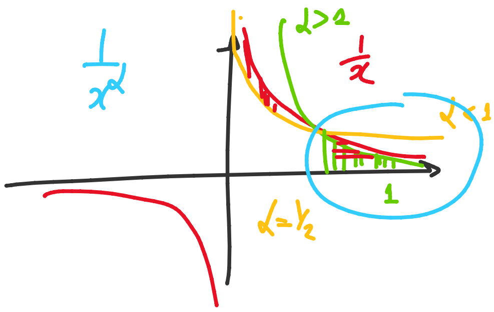
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(-\frac{1}{t}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)\right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[1-\frac{1}{t}\right] = 1 \quad \text{(converge)}$$

EXEMPLO 2. A integral imprópria $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ é convergente ou divergente? Justifique.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\ln|x|\right)_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left[\ln t - \ln 1\right] = +\infty$$

(diverge)



Definição 2. Seja f integrável em $[t, a]$ para todo $t < a$. Definimos

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{a} f(x)\, dx.$$

Definição 3. Seja f integrável em $[-t, t]$, para todo $t > 0$. Definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx$$

desde que ambas as integrais do 2.º membro sejam convergentes.

Observação. Com relação à definição 3, se as duas integrais que ocorrem no 2.º membro forem iguais a $+\infty$ (ou $-\infty$), ou se uma delas for convergente e a outra $+\infty$ (ou $-\infty$), poremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = +\infty \left(\text{resp. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = -\infty \right).$$

Definição 1. Seja f não limitada em $]a, b]$ e integrável em $[t, b]$ para todo t em $]a, b[$. Definimos

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{t \to a^+} \int_{t}^{b} f(x)\, dx$$

desde que o limite exista e seja finito. O número $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ denomina-se *integral imprópria de* f em $[a, b]$. Se o limite for $+\infty$ ou $-\infty$, continuaremos a nos referir a $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ como uma integral imprópria e escreveremos $\int_{a}^{b} f(x)\, dx = +\infty$ ou $\int_{a}^{b} f(x)\, dx = -\infty$, conforme o caso. Se ocorrer um destes casos ou se o limite não existir, diremos que a integral imprópria é *divergente*. Se o limite for finito, diremos que a integral imprópria é *convergente*.

EXEMPLO. Calcule $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 x^{-1/2}\, dx = \lim_{t \to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_t^1$$

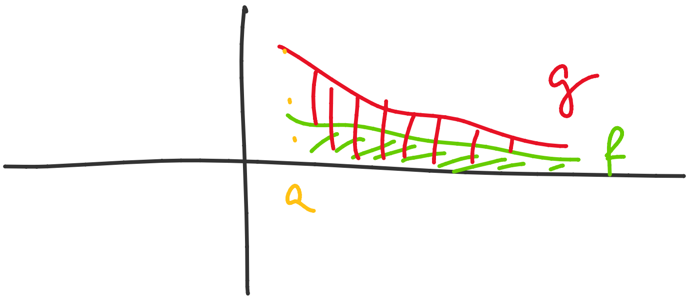
$$= \lim_{t \to 0^+} \left[2\sqrt{1} - 2\sqrt{t}\right) = 2 \text{ (converge)}$$

b) $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$

Critério de comparação. Sejam f e g duas funções integráveis em $[a, t]$, para todo $t > a$, e tais que, para todo $x \geq a$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Então

a) $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ convergente.

b) $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ divergente.



Teorema

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leq 1$.

b) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx$ é convergente para todo $\alpha > 0$.