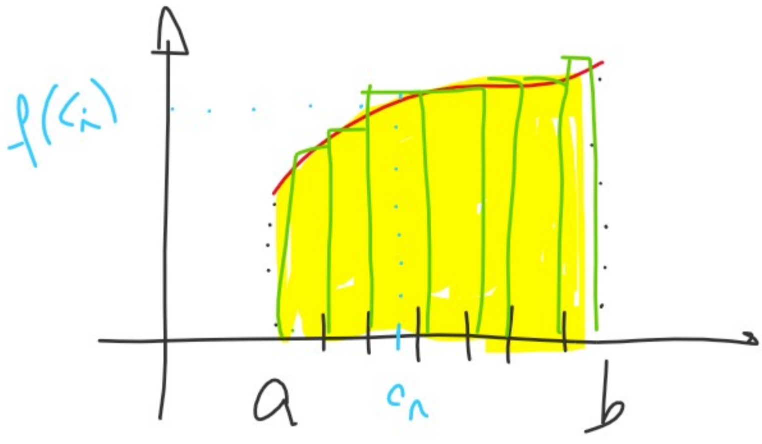
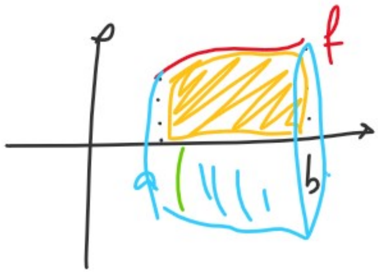
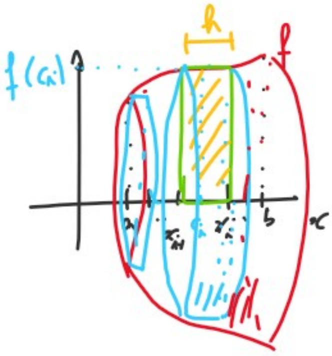
Aplicações da integral definida (T4 e T5)

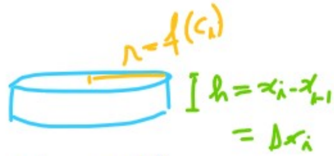


Volume de um sólido de revolução em torno do eixo Ox

Seja f contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$; seja B o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto A do plano limitado pelas retas $x = a$ e $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y = f(x)$. Estamos interessados em definir o *volume* V de B.





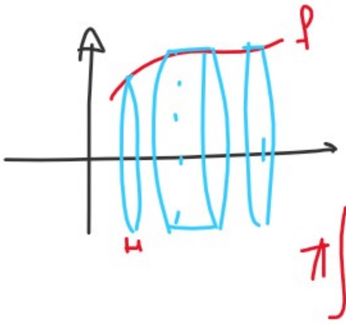


$V_i = \pi r^2 h$

$V_i = \pi (f(c_i))^2 \cdot \Delta x_i$

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi (f(c_i))^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx$$

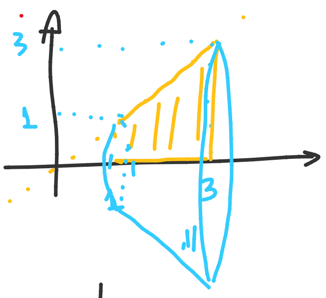
$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx}$$



$\pi \int f^2\, dx \cong \sum f^2 \Delta x$

Exercício: Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo Ox, do conjunto dos pares (x, y) tais que

a) $1 \le x \le 3$ e $0 \le y \le x^2$.



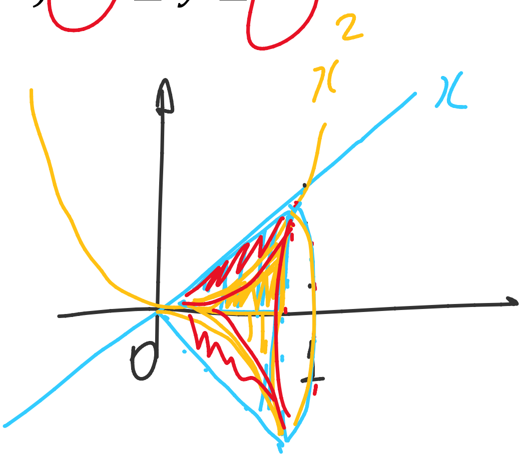
$V = \frac{1}{3}\pi\, 3^2\, 3 - \frac{1}{3}\pi . 1^2 . 1$

$V = \frac{1}{3}\pi (26)$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

$$V = \pi \int_1^3 x^2\, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \pi \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{26\pi}{3}$$

b) $x^2 \le y \le x$.



$x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

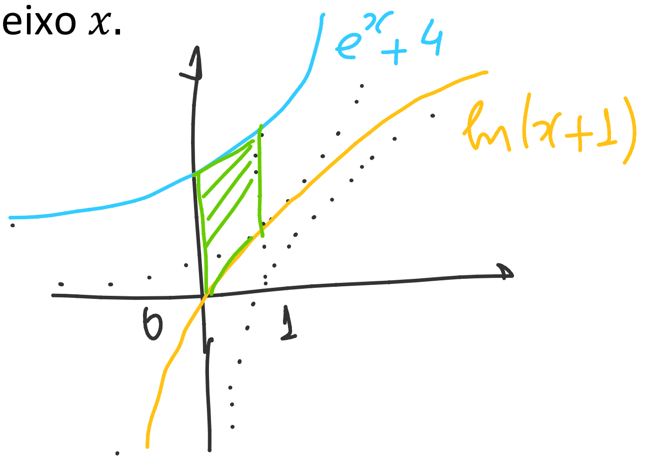
$x(x-1) = 0$

$x = 0$ ou $x = 1$

$$V = \pi \int_0^1 (x)^2\, dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2\, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left((x)^2 - (x^2)^2\right) dx \Rightarrow V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$

Exercício: Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x+1) \leq y \leq e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno do eixo x.



$$V = \pi \int_0^1 (e^x+4)^2 \, dx - \pi \int_0^1 (\ln(x+1))^2 \, dx$$

obs: $\int \ln^2(x+1)\, dx = \int \ln^2 u \, du = u\ln^2 u - \int \cancel{u} \frac{2\ln u}{\cancel{u}} du$

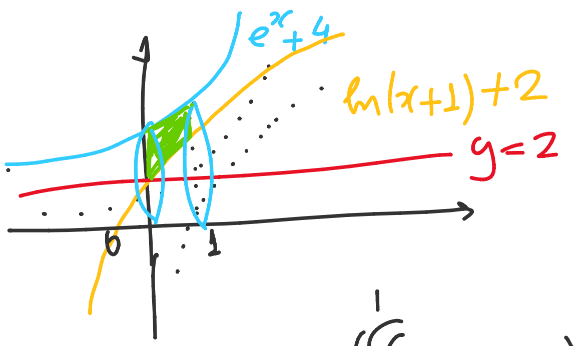
$\int v\, dw = vw - \int w\, dv$

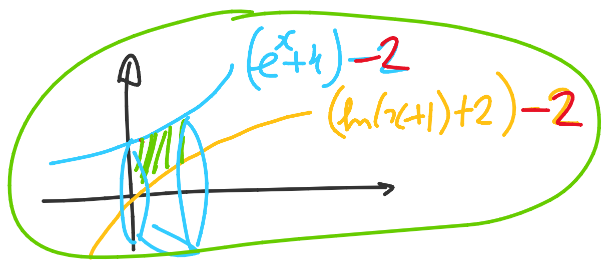
$x+1 = u$
$dx = du$

$v = \ln^2 u \quad dv = \frac{2\ln u}{u} du$
$dw = du \quad w = u$

$= u\ln^2 u - 2(u\ln u - u) + k = (x+1)\ln^2(x+1) - 2(x+1)\ln(x+1) + 2(x+1) + k$

Exercício: Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } \ln(x+1) + 2 \leq y \leq e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.





$$V = \pi \int_0^1 \left[\left((e^x+4)-2\right)^2 - \left((\ln(x+1)+2)-2\right)^2 \right] dx$$